Εισαγωγή στην Τοπολογία

Ευτυχία Ναλπαντίδου.

15 Ιανουαρίου 2019

Περιεχόμενα

1 Βασικά Στοιχεία Τοπολογίας **4**

1.1 Εισαγωγή. 4

1.1.1 Το Θεώρημα του Jordan 5

1.2 Τοπολογικοί χώροι 8

1.3 Βάσεις 9

1.4 Κλειστά σύνολα, κλειστή θήκη, σύνορο 10

1.5 Σύγκριση τοπολογιών 11

1.6 Ασθενείς τοπολογίες 12

1.7 Υπόχωροι 12

1.8 Συμπαγείς χώροι και συμπαγή σύνολα 13

1.9 Συνεκτικοί χώροι και συνεκτικά σύνολα 14

1.10 Γινόμενο τοπολογικών χώρων 16

1.11 Ο χώρος πηλίκο 17

2 Τοπολογία και Γεωμετρία **25**

2.1 Ποιοτικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων 25

2.2 Το πρόβλημα χρωματισμού ενός χάρτη 26

2.3 Το πρόβλημα των γειτονικών περιοχών 30

2.4 Τοπολογικές ιδιότητες 31

2.5 Η έννοια του ομοιομορφισμού 32

2.6 Τοπολογία, συνεχής γεωμετρία 35

2.7 Σχετικές τοπολογικές ιδιότητες 36

3 Τοπολογικές έννοιες σχετικές με επιφάνειες **40**

3.1 Το Θεώρημα του Descartes 40

3.2 Πόσα κανονικά απλά πολύεδρα υπάρχουν 46

3.3 Χαρακτηριστική μιας επιφάνειας 50

3.4 Μονομερείς επιφάνειες 52

3.5 Προσανατολίσιμες και μη-προσανατολίσιμες επιφάνειες 55
3.6 Τοπολογικά πολύγωνα 60
3.7 Κατασκευή κλειστών προσανατολίσιμων επιφανειών από πολύγωνα 61
3.8 Κατασκευή κλειστών μη-προσανατολίσιμων επιφανειών από πολύγωνα 65
3.9 Τοπολογικός ορισμός κλειστών επιφανειών 68

Πρόλογος

Στην παρούσα πτυχιακή εργασία γίνεται μία εισαγωγή στην τοπολογία αναφέροντας κάποια βασικά στοιχεία της, με τρόπο ώστε ο κάθε αναγνώστης ο οποίος δεν είναι γνώστης του θέματος να μπορεί να την κατανοήσει. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρουμε γεωμετρικά προβλήματα της τοπολογίας καθώς και τοπολογικούς τρόπους κατασκευής επιφανειών. Οι βασικές έννοιες με τις οποίες ασχολούμαστε είναι το πρόβλημα χρωματισμού ενός χάρτη,το πρόβλημα των γειτονικών περιοχών,η έννοια του ομοιομορφισμού και οι τοπολογικές ιδιότητες σχημάτων. Το θεώρημα Descartes και το πως συνδέεται με την κατασκευή επιφανειών από πολύγωνα. Επίσης αναφέρουμε την έννοια του τοπολογικού πολυγώνου και την έννοια των προσανατολίσιμων και μηπροσανατολίσιμων επιφανειών. Όλες οι παραπάνω έννοιες καθώς και η δομή της εργασίας είναι βασισμένη στο βιβλίο του M.Fréchet-K.Fan, *Initiation to Combinatorial Topology*.

Κεφάλαιο 1

Βασικά Στοιχεία Τοπολογίας

1.1 Εισαγωγή.

Η τοπολογία είναι ο κλάδος της γεωμετρίας ο οποίος μελετά τις ποιοτικές ομοιότητες των «γεωμετρικών αντικειμένων». Στη γεωμετρία συνήθως μελετάμε τα γεωμετρικά σχήματα σε σχέση με τις μετρικές ιδιότητες που έχουν, και η έννοια της μετρικής παίζει ουσιαστικό ρόλο. Για παράδειγμα συγκρίνουμε δύο τρίγωνα μελετώντας τα μήκη των πλευρών τους ή το μέγεθος των γωνιών τους. Έτσι δύο τρίγωνα είναι «ίσα» αν έχουν τις πλευρές τους ίσες ή μια γωνία και τις προσκείμενες πλευρές τους.

Στην τοπολογία δύο σχήματα θεωρούνται «τοπολογικά ισοδύναμα» αν μπορούμε να περάσουμε από το ένα στο άλλο μέσω ενός συνεχούς μετασχηματισμού. Κάτω από αυτήν την έννοια ένα τρίγωνο, ένα τετράγωνο, ένας κύκλος και μια έλλειψη είναι τοπολογικά ισοδύναμα γιατί το κάθε ένα από αυτά μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω μιας συνεχούς 1-1 και επί απεικόνισης στο άλλο.

Ακόμα και αν ο χώρος είναι μετρικός η έννοια της συνέχειας δεν εξαρτάται τόσο από την απόσταση όσο από τα ανοιχτά υποσύνολα του χώρου. Πράγματι, μια συνάρτηση είναι συνεχής αν αντιστρέφει τα ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά. Σημειώνουμε ότι διαφορετικές μετρικές σε ένα σύνολο μπορεί να δίνουν ακριβώς τα ίδια ανοιχτά σύνολα. Έτσι αν το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ το εφοδιάσουμε με μετρική $d((x,y),(x',y')) = |x-x'|+|y-y'|$ παρόλο που η μετρική διαφέρει πολύ από την συνηθισμένη (την Ευκλείδεια) $D((x,y),(x',y')) = \sqrt{|x-x'|^2+|y-y'|^2}$, για παράδειγμα δεν ισχύει το πυθαγόρειο θεώρημα, τα ανοιχτά σύνολα είναι και στις δύο περιπτώσεις τα ίδια και συνεπώς και οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ένας ομοιομορφισμός είναι μια συνάρτηση $f : X \longmapsto Y$ η οποία είναι «ένα προς ένα» και «επί» (οπότε έχει και αντίστροφη $f^{-1} : Y \longmapsto X$) όπου και οι δύο f και f^{-1} να είναι συνεχείς. Ένας από τους πρωταρχικούς στόχους αυτού του κεφαλαίου θα είναι η ενίσχυση της κατανόησης της έννοιας της συνέχειας και της σχέσης ισοδυναμίας του ομοιομορφισμού. Επίσης θα αναφερθούμε με μεγαλύτερη ακρίβεια στα «γεωμετρικά αντικείμενα » στα οποία ενδιαφερόμαστε (καλούμενα τοπολογικούς χώρους), αλλά θα επικεντρωθούμε κυρίως σε πιο γνωστούς χώρους (όπως επιφάνειες) αντί να διερευνήσουμε γενικότερα τους τοπολογικούς χώρους.

Θα δώσουμε κάποια παραδείγματα πολύ απλών (αν και δύσκολων στο να λυθούν) προβλημάτων στο επίπεδο και στο χώρο που δεν εξαρτώνται από την απόσταση.

1.1.1 Το Θεώρημα του Jordan

Θεωρούμε το σύνηθες Ευκλείδειο Επίπεδο, που είναι το $\mathbb{R}^2$ με την συνηθισμένη μετρική

$$D((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

Ο μοναδιαίος κύκλος ορίζεται να είναι το σύνολο

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

και είναι το πρότυπο για αυτό που αποκαλούμε απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο. Κάθε υποσύνολο C του $\mathbb{R}^2$ που είναι ομοιομορφικό με τον S^1, δηλαδή υπάρχει ένας ομοιομορφισμός $f : S^1 \to C$ ονομάζεται μια *απλή κλειστή καμπύλη*. Όλες οι απλές κλειστές καμπύλες (πχ ένα τρίγωνο, ή μια απλή πολυγωνική γραμμή ή μια έλλειψη είναι παραδείγματα απλών κλειστών καμπυλών.

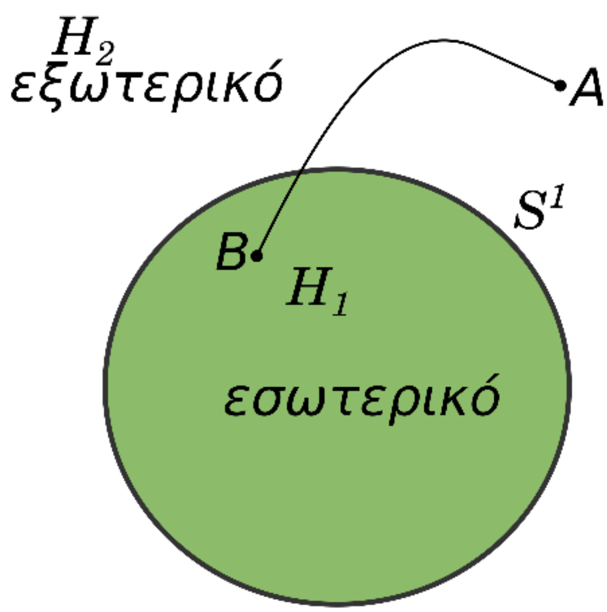
Είναι φανερό ότι ο κύκλος χωρίζει το επίπεδο σε δύο ξένα ανοιχτά σύνολα, το *εσωτερικό* του κύκλου

$$H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

και το *εξωτερικό* του κύκλου

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

που έχουν τις εξής ιδιότητες:



1. Το H_1 είναι ανοιχτό συνεκτικό και φραγμένο.

2. Το H_2 είναι ανοιχτό συνεκτικό και μη φραγμένο.

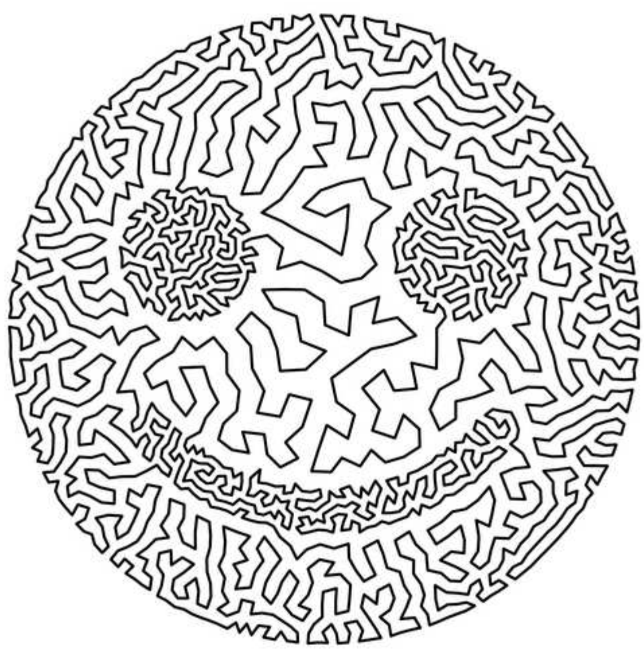
3. Τα H_1 και H_2 έχουν κοινό σύνορο τον κύκλο S^1.

4. Αν ενώσουμε ένα σημείο του H_1 με ένα σημείο του H_2 με κάποια συνεχή γραμμή τότε η γραμμή αυτή θα τέμνει το σύνορο S^1.

Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι ακριβώς τα ίδια θα συμβαίνουν αν αντικαταστήσουμε τον κύκλο S^1 με μια οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη C δηλαδή το επίπεδο θα χωρίζεται σε δύο ξένα ανοιχτά σύνολα, το *εσωτερικό* της C και το *εξωτερικό* της C που θα έχουν τις εξής ιδιότητες:

1. Το H_1 είναι ανοιχτό συνεκτικό και φραγμένο.
2. Το H_2 είναι ανοιχτό συνεκτικό και μη φραγμένο.
3. Τα H_1 και H_2 έχουν κοινό σύνορο την απλή κλειστή καμπύλη C.
4. Αν ενώσουμε ένα σημείο του H_1 με ένα σημείο του H_2 με κάποια συνεχή γραμμή τότε η γραμμή αυτή θα τέμνει το σύνορο C.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αληθές. Ωστόσο η απόδειξή του είναι δύσκολη για τον λόγο ότι μια απλή κλειστή καμπύλη μπορεί να έχει πολύ περίπλοκο σχήμα, και δεν φαίνεται να υπάρχει εύκολος τρόπος να ξεχωρίσουμε το εσωτερικό από το εξωτερικό.



Μια απλή κλειστή καμπύλη.

Οι χώροι που θα μας ενδιαφέρουν βασικά είναι ως υπόχωροι κάποιων Ευκλείδειων χώρων δηλαδή χώρων της μορφής $\mathbb{R}^n$.

Θα ξεκινήσουμε με κάποιες βασικές έννοιες της τοπολογίας.

1.2 Τοπολογικοί χώροι

Διαισθητικά οι «τοπολογικοί χώροι» είναι μαθηματικά αντικείμενα στα οποία έχει νόημα να ορίσουμε της έννοιας της σύγκλισης και της συνέχειας. Ένας τοπολογικός χώρος είναι ένα σύνολο X στο οποίο έχουμε καθορίσει κάποια υποσύνολά σαν «ανοιχτά» σύνολα. Πριν διατυπώσουνε τον ορισμό του τοπολογικού χώρου θα θυμίσουμε τι σημαίνει η γενικευμένη ένωση και η γενικευμένη τομή μιας οικογένειας συνόλων ή (που είναι ουσιαστικά το ίδιο) τι σημαίνει η γενικευμένη ένωση και η γενικευμένη τομή ενός συνόλου συνόλων. Αν $(A_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια συνόλων τότε θέτουμε

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \text{ υπάρχει } i \in I \text{ με } x \in I\}$$
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : \text{ για κάθε } i \in I \text{ ισχύει } x \in I\}$$

Αντίστοιχα αν $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο από σύνολα τότε θέτουμε

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x : \text{ υπάρχει } A \in \mathcal{A} \text{ με } x \in I\}$$
$$\bigcap \mathcal{A} = \{x : \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A} \text{ ισχύει } x \in I\}$$

Ορισμός 1.1. Ένας *τοπολογικός χώρος* είναι ένα σύνολο X μαζί με ένα σύνολο $\mathcal{T}$ από υποσύνολα του X που έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.

2. Η ένωση στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$. Συγκεκριμένα, αν $\mathcal{A}$ είναι υποσύνολο της $\mathcal{T}$ τότε το σύνολο $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

3. Η τομή πεπερασμένων στοιχείων της $\mathcal{T}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{T}$. Συγκεκριμένα, αν $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο της $\mathcal{T}$ τότε το σύνολο $\bigcap \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Το σύνολο $\mathcal{T}$ λέγεται η *τοπολογία* του X και τα στοιχεία του $\mathcal{T}$ ονομάζονται *ανοιχτά* υποσύνολα του X. Ένας τοπολογικός χώρος θα συμβολίζεται σαν ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{T})$.

Με μόνο αυτόν τον ορισμό μπορούμε να ορίσουμε τις δύο βασικές έννοιες της τοπολογίας: Την συνέχεια μιας συνάρτησης και την έννοια του ομοιομορφισμού.

Ορισμός 1.2. Έστω $(X, \mathcal{T}_X)$ και $(Y, \mathcal{T}_Y)$ δύο τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ θα λέγεται:

1. *Συνεχής* αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο B του Y το $f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

2. *Ανοιχτή* αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο A του X το $f^{-1}(A)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y.

3. *Ομοιομορφισμός* αν είναι συνεχής 1-1 και επί και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής.

Αν υπάρχει ομοιομορφισμός $f : X \to Y$ οι χώροι $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ λέγονται *τοπολογικά ομοιομορφικοί* ή απλά *ομοιομορφικοί* και σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $(X, \mathcal{T}_X) \cong (Y, \mathcal{T}_Y)$ ή απλά $X \cong Y$.

Προφανώς μια 1-1 και επί συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής και ανοιχτή. Η σχέση $\cong$ είναι σχέση ισοδυναμίας στην κλάση των τοπολογικών χώρων, με την εξής έννοια[1]:

Πρόταση 1.3. *Αν X, Y, Z είναι τοπολογικοί χώροι τότε ισχύουν τα εξής:*

1. $X \cong X$.

2. *Αν $X \cong Y$ τότε $X \cong Y$.*

3. *Αν $X \cong Y$ και $Y \cong Z$ τότε $X \cong Z$.*

1.3 Βάσεις

Ένας συνηθισμένος τρόπος για να κατασκευάζουμε τοπολογίες είναι μέσω βάσεων και γενικότερα υποβάσεων.

Ορισμός 1.4. Έστω X ένα σύνολο. Ένα σύνολο $\mathcal{B}$ από υποσύνολα του X λέγεται μια *βάση τοπολογίας* του X αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Αν $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ με $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

[1] Για λόγους απλότητας παραλείπουμε να γράφουμε τις τοπολογίες, δηλαδή αν λέμε ότι το X είναι τοπολογικός χώρος εννοούμε ότι το σύνολο X είναι εφοδιασμένο με μια συγκεκριμένη τοπολογία $\mathcal{T}_X$.

2. $\bigcup \mathcal{B} = X$, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ με $x \in B$.

Αν $\mathcal{B}$ είναι μια *βάση τοπολογίας* του X τότε ορίζουμε ένα υποσύνολο του X σαν *ανοιχτό* αν είναι ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$, δηλαδή το A είναι ανοιχτό αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει ένα $B \in \mathcal{B}$ με $a \in B$ και $B \subseteq A$. Το σύνολο όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του X (με τον προηγούμενο ορισμό) είναι τοπολογία που λέγεται η τοπολογία που παράγει η βάση $\mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.5 (Τοπολογία μετρικών χώρων)**.** Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο (X, d). Για κάθε $a \in X$ και $r > 0$ θέτουμε

$$B(a, r) = \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

Τότε το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{B(a, r) : a \in X, r \in \mathbb{R}\}$$

είναι βάση της συνήθους τοπολογίας του χώρου. Με αυτή την τοπολογία ένα υποσύνολο A του X είναι ανοιχτό αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $r > 0$ ώστε $B(a, r) \subseteq A$.

1.4 Κλειστά σύνολα, κλειστή θήκη, σύνορο

Όπως θα δούμε στην συνέχεια σε πολλές κατασκευές που περιέχουν συνεχείς συναρτήσεις είναι προτιμότερο να τις μελετάμε πάνω σε κλειστά σύνολα παρά σε ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 1.6. Ένα σύνολο $A \subset X$ ονομάζεται *κλειστό* αν το συμπλήρωμά του A^c είναι ανοικτό.

Πρόταση 1.7. *Έστω $f : A \to B$ είναι συνεχής αν και μόνον αν οι αντίστροφη εικόνα κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο, δηλαδή για κάθε G του B το $f^{-1}(G)$ είναι κλειστό στον A.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι f συνεχής και G κλειστό υποσύνολο του B. Τότε G^c είναι ανοικτό και $f^{-1}(G) = (f^{-1}(G^c))^c$, όπου $f^{-1}(G^c)$ είναι ανοικτό άρα $f^{-1}(G)$ κλειστό. Όμοια αποδεικνύεται και το αντίστροφο και αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Ορισμός 1.8. Έστω ένα σύνολο $A \subset X$:

1. Η *κλειστή θήκη* του A είναι η τομή όλων των κλειστών συνόλων που περιέχουν το A και την συμβολίζουμε με $\overline{A}$.

2. Το *σύνορο* του A είναι τομή της $\overline{A} \cap \overline{A^c}$ και συμβολίζεται με $Bd(A)$. Αν ένα σημείο ανήκει στο σύνορο του A ονομάζεται *συνοριακό σημείο* του A.

1.5 Σύγκριση τοπολογιών

Σε κάθε σύνολο X ορίζονται δύο προφανείς τοπολογίες, η κάθε μια στον αντίποδα της άλλης:

- Η *τετριμμένη τοπολογία* $\mathcal{T}_{\text{τετ}} = \{X, \emptyset\}$ όπου τα μόνα ανοιχτά σύνολα είναι το κενό και ο χώρος.

- Η *διακριτή τοπολογία* $\mathcal{T}_{\text{διακρ.}} = \wp(X)$ όπου κάθε υποσύνολο του X είναι ανοιχτό.

Προφανώς αν το σύνολο X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία ορίζονται και άλλες τοπολογίες. Γενικά συγκρίνουμε τις τοπολογίες ως προς την σχέση του υποσυνόλου.

Ορισμός 1.9. Αν $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ είναι δύο τοπολογίες σε ένα σύνολο X με $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ θα λέμε ότι η $\mathcal{T}_1$ είναι *ασθενέστερη* από την $\mathcal{T}_2$ ή ότι η $\mathcal{T}_2$ είναι *ισχυρότερη* από την $\mathcal{T}_1$.

Δεδομένου ότι η τομή μιας οικογένειας τοπολογιών σε ένα σύνολο X είναι τοπολογία του X έχουμε το εξής:

Πρόταση 1.10. *Αν $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια τοπολογιών σε ένα σύνολο X τότε:*

1. *Η τομή τους $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ είναι η ισχυρότερη τοπολογία που περιέχεται σε όλες τις τοπολογίες $\mathcal{T}_i$.*

2. *Το σύνολο*

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{T}_i = \bigcap \left\{ \mathcal{T} : \mathcal{T} \text{ είναι τοπολογία του } X \text{ με } \bigcup_{i\in I} \mathcal{T}_i \subseteq \mathcal{T} \right\}$$

είναι η ασθενέστερη τοπολογία που περιέχει σε όλες τις τοπολογίες $\mathcal{T}_i$.

1.6 Ασθενείς τοπολογίες

Οι έννοιες της ασθενέστερης ή αντίστοιχα ισχυρότερης τοπολογίας είναι χρήσιμες για να ορίζουμε νέες τοπολογίες σε ένα σύνολο. Δίνουμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.11. Παρατηρείστε αρχικά ότι αν X είναι τοπολογικός χώρος με την διακριτή τοπολογία και Y οποιοσδήποτε άλλος τοπολογικός χώρος τότε κάθε συνάρτηση $f : X \to Y$ θα είναι συνεχής.

Έστω X τώρα σύνολο και Y τοπολογικός χώρος. Δίνεται μια συνάρτηση $f : X \to Y$. Προφανώς μπορούμε να εφοδιάσουμε το X με μια τοπολογία ώστε η f να γίνει συνεχής, πάρτε για παράδειγμα την διακριτή τοπολογία στο X. Αυτή όμως είναι πάρα πολύ ισχυρή.

Ψάχνουμε να βρούμε την ασθενέστερη δυνατόν τοπολογία στο X ώστε η f να γίνει συνεχής. Θυμίζουμε ότι η f θα είναι συνεχής αν για κάθε ανοιχτό υποσύνολο V του Y το $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό. Συνεπώς η ασθενέστερη τοπολογία που κάνει την f συνεχή *θα πρέπει* να έχει όλα τα $f^{-1}(V)$ ανοιχτά όταν το V είναι ανοιχτό υποσύνολο του Y. Τα σύνολα αυτά πιθανόν να μην αποτελούν τοπολογία είναι όμως βάση για μια τοπολογία που είναι η ζητούμενη.

Το παράδειγμα αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1.12. Έστω X σύνολο και Y τοπολογικός χώρος. Αν $\mathcal{F}$ είναι ένα σύνολο από συναρτήσεις $f : X \to Y$ ονομάζουμε *ασθενή τοπολογία* του X που επάγεται από το $\mathcal{F}$ την ασθενέστερη τοπολογία του που κάνει κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{F}$ συνεχή. Η τοπολογία αυτή έχει σαν βάση το σύνολο:

$$\{f^{-1}(V) : f \in \mathcal{F} \text{ και } V \text{ ανοιχτό υποσύνολο του } Y\}.$$

1.7 Υπόχωροι

Ορισμός 1.13. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Ένα σύνολο $V \subset A$ είναι ανοικτό στην *τοπολογία υπόχωρου* του A αν και μόνον αν V είναι η τομή του A με ένα ανοικτό σύνολο στον X: δηλαδή, V είναι ανοικτό στο A αν και μόνον αν $V = U \cap A$, όπου U είναι ανοικτό στον X. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{T}_{\text{υπ.}}$ αυτή την τοπολογία.

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ότι ο παραπάνω τοπολογικός χώρος είναι εφοδιασμένος με την τοπολογία $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}_A$ η σχετική τοπολογία του A. Καθώς $\mathcal{B}$ βάση της τοπολογίας $\mathcal{T}$ τότε η οικογένεια

$$\mathcal{B}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{B}\}$$

είναι μια βάση της $\mathcal{T}_A$.

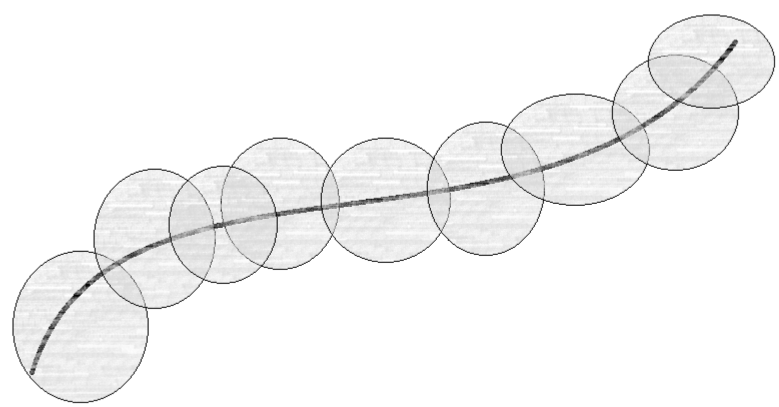
Πρόταση 1.14. *Αν $A \subset X$ έχει την τοπολογία του υπόχωρου, τότε $D \subset A$ είναι κλειστό στο A αν και μόνον αν $D = A \cap E$, όπου E είναι κλειστό στον X.*

Απόδειξη. Έχουμε ότι D κλειστό στο $A \iff A \setminus D$ είναι ανοικτό $\iff A \setminus D = O \cap A$, όπου O είναι ανοικτό στον $\mathcal{X} \iff A \setminus (A \setminus D) = A \setminus (O \cap A) \iff A \cap (A \setminus D)^c = A \cap (O \cap A)^c \iff A \cap (A \cap D^c)^c = A \cap (O^c \cup A^c) \iff A \cap (A^c \cup D) = (A \cap O^c) \cup (A \cap A^c) \iff (A \cap A^c) \cup (A \cap D) = (A \cap O^c) \cup (\varnothing) \iff (\varnothing) \cup (A \cap D) = (A \cap O^c) \cup (\varnothing) \iff A = O^c \cap A$. Επειδή όμως το O είναι ανοικτό στον $\mathcal{X}$ συνεπάγεται $E = O^c$ κλειστό. Άρα $D = E \cap A$. □

1.8 Συμπαγείς χώροι και συμπαγή σύνολα

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την έννοια της συμπάγειας σε γενικούς τοπολογικούς χώρους αλλά ειδικότερα σε μετρικούς χώρους και σε περιπτώσεις υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.15. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ο X είναι *συμπαγής* αν και μόνον αν για κάθε ανοικτό κάλυμμα του X υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα που περιέχει τον X.



Μία πεπερασμένη κάλυψη για μία καμπύλη του $\mathbb{R}^2$.

Πρόταση 1.16. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ ένας συμπαγής τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ κλειστό. Τότε το υποσύνολο A είναι συμπαγής στον X.*

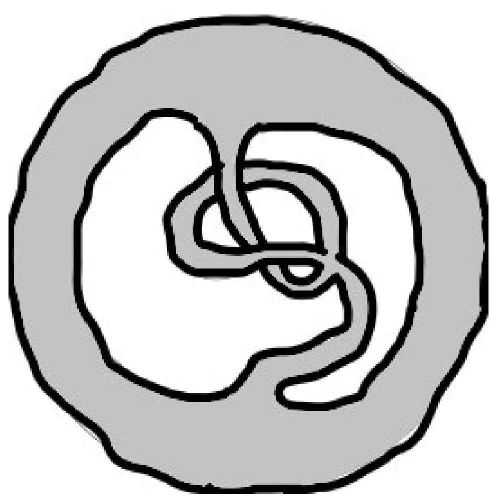
Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{T}$ ένα κάλυμμα του A. Επειδή A είναι κλειστό στον X, το A^c είναι ανοικτό στον X. Άρα το $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cup A^c$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του X. Όμως X είναι συμπαγής. Οπότε υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του $\mathcal{U}'$, έστω $U_1', U_2', ..., U_n'$ με $U_1' \cup U_2' \cup ... \cup U_n' \supseteq A$. Συνεπώς, το A είναι συμπαγές. $\square$

1.9 Συνεκτικοί χώροι και συνεκτικά σύνολα

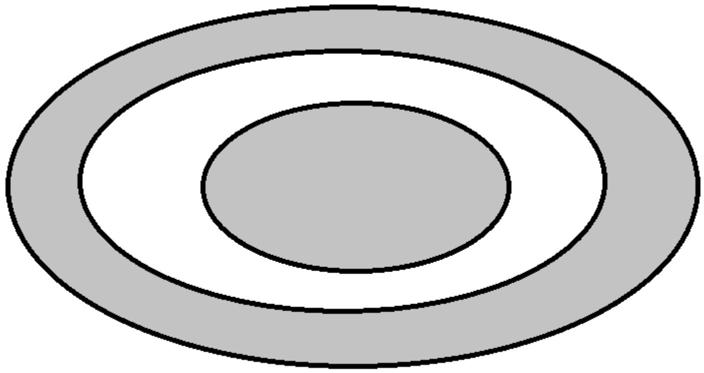
Η επόμενη έννοια που θα αναφέρουμε είναι η έννοια της συνεκτικότητας. Είναι απλό να πούμε ότι η έννοια αυτή μας βοηθάει να διακρίνουμε αν το υποσύνολο αποτελείται από ένα «κομμάτι» ή από δύο ή περισσότερα ξένα μεταξύ τους «κομμάτια».

Ορισμός 1.17. Ένας τοπολογικός χώρος X είναι *συνεκτικός* αν δεν υπάρχουν δύο μη κενά ανοικτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A, B του X ώστε $X = A \cup B$.

Ορισμός 1.18. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε το A είναι *συνεκτικό* αν είναι συνεκτικός χώρος ως προς την τοπολογία του υπόχωρου A.



Ένα απλό συνεκτικό σύνολο στον $\mathbb{R}^3$.



Ένα απλό μη συνεκτικό σύνολο στον $\mathbb{R}^2$.

Πρόταση 1.19. *Έστω X τοπολογικός χώρος και A_i μία συλλογή υποσυνόλων του X τέτοια ώστε να έχουνε τουλάχιστον ένα κοινό σημείο μεταξύ τους. Τότε η ένωση $A = \cup A_i$ είναι συνεκτική.*

Απόδειξη. Η απόδειξη παραθέτεται στο **1** (10.45 Πρόταση σελ. 296). □

Πρόταση 1.20. *Θεωρούμε $f : X \to Y$ συνεχής και X συνεκτικός. Τότε η εικόνα $f(X)$ είναι συνεκτική.*

Απόδειξη. Η απόδειξη παραθέτεται στο **1** (10.48 Πρόταση σελ. 297). □

Ορισμός 1.21. Ένας χώρος X ονομάζεται *δρομοσυνεκτικός* αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to X$ (ονομάζεται μονοπάτι στον X) με $f(0) = x$ και $f(1) = y$. Λέμε ότι το μονοπάτι συνδέει το x με το y.

Πρόταση 1.22. *Έστω X δρομοσυνεκτικός και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Τότε η εικόνα $f(X)$ είναι δρομοσυνεκτική.*

Απόδειξη. Έστω $u = f(x), v = f(y)$ σημεία του $f(X)$. Αφού ο X είναι δρομοσυνεκτικός, υπάρχει μονοπάτι a που να συνδέει το x με το y. Τότε το $f(a)$ είναι ένα μονοπάτι που συνδέει το u με το v. □

Η βασική σχέση μεταξύ των δύο μορφών συνεκτικότητας δίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.23. *Εάν ο X είναι δρομοσυνεκτικός είναι και συνεκτικός.*

Απόδειξη. Έστω ένα σημείο $x \in X$ και για κάθε σημείο $y \in X$, επιλέγω ένα μονοπάτι από το x στο y. Οι εικόνες αυτών των μονοπατιών είναι συνεκτικές αφού είναι εικόνες συνεκτικών συνόλων υπό συνεχείς απεικονίσεις και κάθε μία από αυτές περιέχει το x. Οι ένωσή τους είναι όλο το X άρα παίρνουμε ότι ο X είναι συνεκτικός χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.17. □

1.10 Γινόμενο τοπολογικών χώρων

Υπενθυμίζουμε το γινόμενο δύο συνόλων:

Ορισμός 1.24. Έστω X και Y δύο σύνολα. Το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) όπου $x \in X$ και $y \in Y$ καλείται *γινόμενο* των συνόλων X και Y και συμβολίζεται ως $X \times Y$.

Θεώρημα 1.25. *Έστω X και Y δύο τοπολογικοί χώροι με τοπολογίες $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ αντιστοίχως. Το σύνολο $\mathcal{B}$ όλων των υποσυνόλων W του $X \times Y$ της μορφής $U \times V$ όπου $U \in \mathcal{T}_1$ και $V \in \mathcal{T}_2$ είναι βάση τοπολογίας επί του συνόλου $X \times Y$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη παραθέτεται στο **5** (5.1.2 Θεώρημα σελ. 313). □

Ορισμός 1.26. Έστω $(X, \mathcal{T}_1)$ και $(Y, \mathcal{T}_2)$ τοπολογικοί χώροι. Η τοπολογία $\mathcal{T}$ που έχει σαν βάση το παραπάνω σύνολο $\mathcal{B}$ καλείται *γινόμενο των τοπολογιών* $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ και συμβολίζεται με $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Το σύνολο $X \times Y$ με την τοπολογία $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ καλείται *τοπολογικό γινόμενο* των χώρων X και Y.

Θεώρημα 1.27 (Tychonoff)**.** *Έστω X και Y συμπαγής. Τότε το γινόμενο $X \times Y$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη παραθέτεται στο **4** (1.5.2 Θεώρημα σελ. 27). □

Τα παραπάνω γενικεύονται για γινόμενο άπειρου ή πεπερασμένου πλήθους τοπολογικών χώρων.

1.11 Ο χώρος πηλίκο

Η έννοια του χώρου πηλίκου και της τοπολογίας του χώρου πηλίκου ενός τοπολογικού χώρου είναι από τις πιο σημαντικές στην τοπολογία. Είναι μία μέθοδος για να κατασκευάζουμε πιο σύνθετους τοπολογικούς χώρους ξεκινώντας από πιο απλούς «κολλώντας» μεταξύ τους κάποια σημεία του χώρου. Το πιο απλό παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε ένα σκοινί που αν ενώσουμε τα δύο άκρα του προκύπτει μια κλειστή απλή καμπύλη. Ένα άλλο απλό παράδειγμα είναι να ενώσουμε δύο απέναντι πλευρές ενός χαρτιού για να φτιάξουμε έναν κύλινδρο. Μαθηματικά, η διαδικασίες αυτές περιγράφονται μέσα από την έννοια του χώρου πηλίκου μιας σχέσης ισοδυναμίας. Δίνουμε τους βασικούς ορισμούς (έννοιες) που θα χρειαστούμε παρακάτω για να περιγράψουμε αυστηρά την έννοια του χώρου πηλίκου και της τοπολογίας πηλίκο. Οι έννοιες αυτές είναι η «σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο X»και η έννοια της « διαμέρισης » ενός συνόλου X.

Ορισμός 1.28. Έστω X σύνολο. Μια διμελής σχέση $\sim$ στο X ονομάζεται *σχέση ισοδυναμίας* αν ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. Για κάθε $x \in X$ ισχύει $x \sim x$.
2. Αν $x, y \in X$ και $x \sim y$, τότε $y \sim x$.
3. Αν $x, y, z \in X$, $x \sim y$ και $y \sim z$ τότε $x \sim z$.

Μια *διαμέριση* του X είναι μια οικογένεια $\mathscr{P}$ από μη κενά, ξένα ανά δύο υποσύνολα του X που η ένωσή τους δίνει όλο το X.

Ορισμός 1.29. Έστω X σύνολο. Μια *διαμέριση* του X είναι μια οικογένεια συνόλων $\mathscr{P}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

1. Για κάθε $A \in \mathscr{P}$, $A \subseteq X$ και $A \neq \emptyset$.
2. Αν $A, B \in \mathscr{P}$ και $A \neq B$ τότε $A \cap B = \emptyset$.
3. $\bigcup \mathscr{P} = X$ δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει $A \in \mathscr{B}$ με $x \in A$.

Από την στιγμή που έχουμε ορίσει μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο, τότε σε αυτό δημιουργούνται αυτόματα «κλάσεις ισοδυναμίας», που δεν είναι τίποτε άλλο πάρα υποσύνολα του X που ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 1.30. Έστω X σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο X.

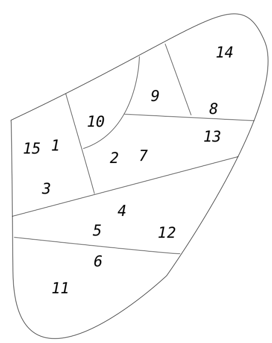
1. Ορίζουμε σαν *κλάση ισοδυναμίας* ενός στοιχείου $x \in X$ να είναι το υποσύνολο του X
$$[x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

2. Το σύνολο
$$X/_{\sim} = \{[x] : x \in X\}$$
όλων των κλάσεων ισοδυναμίας λέγεται ο *χώρος πηλίκο.*

3. Η απεικόνιση $Q : X \to X/_{\sim}$ με $Q(x) = [x]$ είναι μια απεικόνιση από το X **επί** του χώρου πηλίκου $X/_{\sim}$ που λέγεται η *απεικόνιση πηλίκο.*

Παρατηρείστε ότι αφού τα στοιχεία του $\mathscr{P}$, στον προηγούμενο Ορισμό 1.28, είναι ξένα ανά δύο τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $A \in \mathscr{B}$ με $x \in A$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο της διαμέρισης που περιέχει το x θα το συμβολίζουμε με A_x. Από αυτό έχουμε άμεσα ότι κάθε διαμέριση $\mathscr{P}$ ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ όπου $x \sim y$ αν και μόνο αν $A_x = A_y$. Προφανώς $A_x = \{y \in X : x \sim y\}$.

Παράδειγμα 1.31. *Θεωρούμε το σύνολο $X = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ των αριθμών από το 1 έως το 15 και την παρακάτω διαμέριση του*



Η διαμέριση αυτή ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα στοιχεία της διαμέρισης. Για παράδειγμα έχουμε $8 \sim 14$.

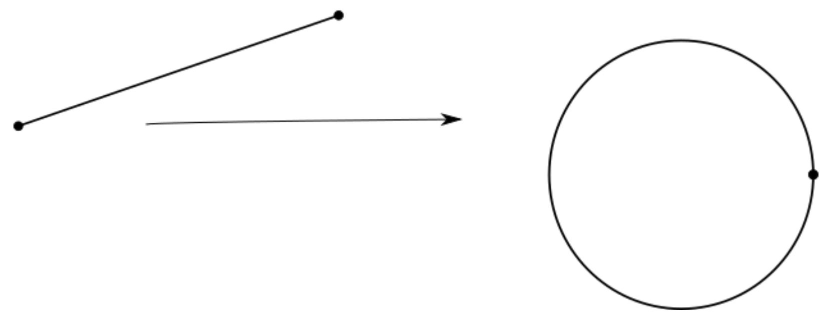
Η σχέση μεταξύ των εννοιών «σχέση ισοδυναμίας» και «διαμέριση» δίνεται από την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.32. *Έστω X ένα σύνολο.*

1. *Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας τότε ο χώρος πηλίκο $Y = X/_{\sim}$ είναι μια διαμέριση του X.*

2. *Αν $\mathscr{P}$ είναι μια διαμέριση του X τότε αυτή ορίζει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ όπου $x \sim y$ αν και μόνο αν αυτά ανήκουν στο ίδιο στοιχείο της διαμέρισης δηλαδή υπάρχει $A \in \mathscr{P}$ με $\{x, y\} \subseteq A$. Ως προς αυτήν την σχέση έχουμε $X/_\sim = \mathscr{P}$.*

Παράδειγμα 1.33. Το απλούστερο παράδειγμα είναι να κολλήσουμε τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος και να πάρουμε έναν κύκλο.



Συγκεκριμένα, αν $X = [0, 1]$ θα ταυτίσουμε το 0 με το 1 (θα τα θεωρήσουμε ισοδύναμα) και θα αφήσουμε τα υπόλοιπα στοιχεία όπως έχουν. Με άλλα λόγια ορίσαμε μια σχέση ισοδυναμίας με $1 \sim 0$ και $x \sim x$ αν $x \notin \{0, 1\}$ και ο χώρος πηλίκο (δηλαδή οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την $\sim$) είναι το σύνολο που τα στοιχεία του είναι τα μονοσύνολα $\{x\}$ όταν $x \neq 0$ ή $x \neq 1$ και το δισύνολο $\{0, 1\} = [0] = [1]$, δηλαδή

$$Y = X/_\sim = \{ \{x\} : x \in (0, 1)\} \} \cup \{\{0, 1\}\}$$

επίσης η απεικόνιση πηλίκο δίνεται από την

$$Q(x) = \begin{cases} \{x\} & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \\ \{0, 1\} & \text{αν } x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{cases}$$

που θεωρούμε ότι περιγράφει τον κύκλο. Το $X = [0, 1]$ έχει την συνηθισμένη τοπολογία. Αλλά ποια είναι η τοπολογία του χώρου πηλίκο $X/_\sim$ αναπαριστά τον κύκλο;

Ο ορισμός της τοπολογίας στο χώρο πηλίκο $X/_\sim$ ενός τοπολογικού χώρου X βασίζεται σε αυτά που αναφέραμε στις παραγράφους 1.6 και 1.5, και είναι η ισχυρότερη τοπολογία στο σύνολο $X/_\sim$ που κάνει την απεικόνιση πηλίκο $Q : X \to X/_\sim$ συνεχή. Θα δώσουμε έναν γενικότερο ορισμό:

Ορισμός 1.34. Έστω X τοπολογικός χώρος και Y απλό σύνολο, χωρίς τοπολογία.

1. Αν $f : X \to Y$ είναι μια απεικόνιση από το X *επί* του Y ονομάζουμε *τοπολογία πηλίκο στο Y που επάγεται από την f* την ισχυρότερη τοπολογία στο Y που κάνει την f συνεχή.

2. Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X ονομάζουμε *τοπολογία πηλίκο* στο $X/_{\sim}$ την τοπολογία πηλίκο που επάγεται από την απεικόνιση πηλίκο $Q : X \to X/_{\sim}$.

Ισχύουν οι εξής προτάσεις:

Πρόταση 1.35. *Έστω X τοπολογικός χώρος και Y απλό σύνολο, χωρίς τοπολογία.*

1. *Αν $f : X \to Y$ είναι μια απεικόνιση από το X επί του Y τότε η τοπολογία πηλίκο στο Y που επάγεται από την f αποτελείται από όλα τα σύνολα $G \subseteq Y$ που έχουν την ιδιότητα $f^{-1}(G)$ να είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.*

2. *Αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο X τότε ένα υποσύνολο $\mathcal{A}$ του $X/_{\sim}$ είναι ανοιχτό ως προς την τοπολογία πηλίκο αν το σύνολο*

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{[x] : [x] \in \mathcal{A}\}$$

είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.

Όπως θα δούμε και πιο κάτω μας ενδιαφέρει να ξέρουμε αν οι απεικονίσεις που ορίζουμε πάνω σε σύνολα είναι συνεχείς. Το ίδιο μέλημα έχουμε και στους χώρους πηλίκο δηλαδή θέλουμε να ξέρουμε πότε μια απεικόνιση από ένα χώρο πηλίκο σε ένα άλλο χώρο είναι συνεχής, προκειμένου να μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα που θα αναφέρουμε και στην συνέχεια της εργασίας.

Πρόταση 1.36. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον X και $Q : X \to X/_{\sim}$ η απεικόνιση πηλίκο. Μια συνάρτηση $f : (X/\sim) \to Y$ είναι συνεχής αν και μόνον αν η συνάρτηση $f \circ Q : X \to Y$ είναι συνεχής.*

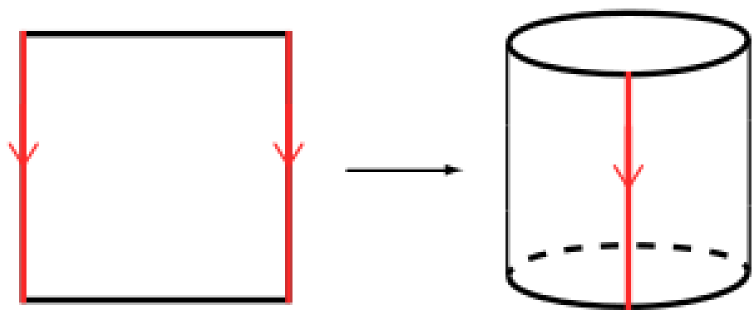
Αν και δεν είναι άμεσο η τοπολογία πηλίκο είναι πάντοτε αυτή που θα πρέπει να είναι. Δηλαδή αν θεωρήσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα και κολλήσουμε τα άκρα του όπως στο Παράδειγμα 1.33 ο χώρος πηλίκο που προκύπτει με την τοπολογία πηλίκο είναι ομοιομορφικός με ένα κύκλο στον χώρο.

Όμοια αν κολλήσουμε κατάλληλα τις απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου ο χώρος πηλίκο που προκύπτει με την τοπολογία πηλίκο είναι ομοιομορφικός είτε με έναν κύλινδρο στο χώρο, είτε με έναν τόρο, είτε με την ταινία Möbius. Παραθέτουμε παρακάτω κάποια παραδείγματα, τα οποία τα έχουμε δανειστεί από το [5].

Παράδειγμα 1.37. *Ας θεωρήσουμε το τετράγωνο $[0,1] \times [0,1]$ όπου το σημείο $(0,t)$ θα «κολλήσει» με το απέναντι σημείο $(1,t)$ που σημαίνει ότι η σχέση ισοδυναμίας ορίζεται σαν*

$$(0,t) \sim (1,t)\,, \forall t \in [0,1]$$

Τότε ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός με τον κύλινδρο $S^1 \times [0,1]$.



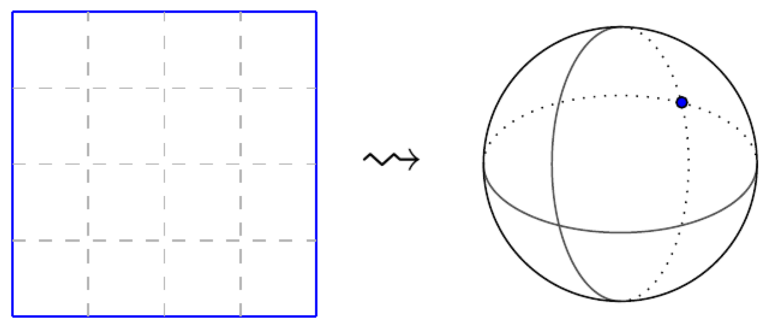
Παράδειγμα 1.38. *Ας θεωρήσουμε το τετράγωνο $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ και ας ορίσουμε σαν σύνορο του το σύνολο*

$$\partial I^2 = (\{0,1\} \times I) \cup (I \times \{0,1\})$$

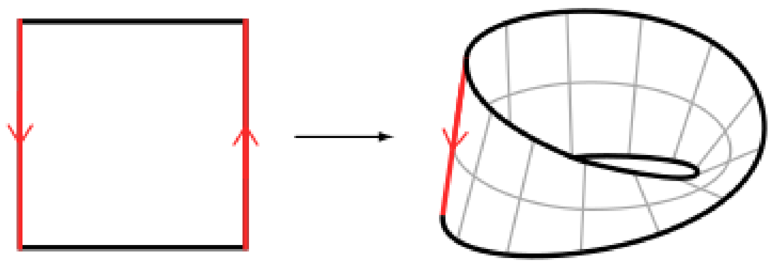
Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας ταυτίζοντας όλα τα σημεία του σύνορου (θεωρώντας τα σαν ένα σημείο και αφήνοντας τα άλλα όπως έχουν, δηλαδή

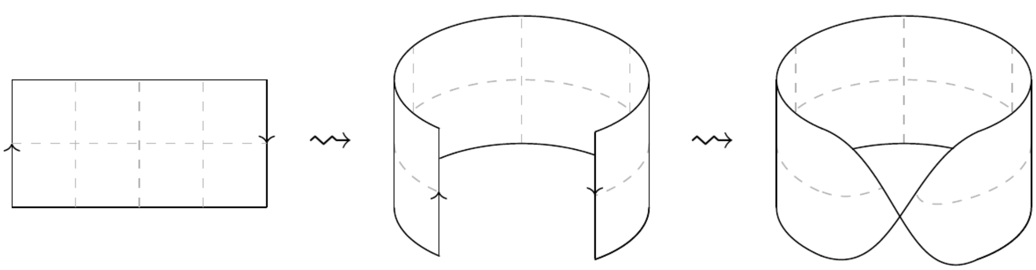
$$(s_1,t_1) \sim (s_2,t_2) \Leftrightarrow (s_1 = s_2 \; \textit{και} \; t_1 = t_2) \quad \textit{είτε} \; (s_1,t_1),(s_2,t_2) \in \partial I^2$$

Τότε ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός με την επιφάνεια μιας σφαίρας.

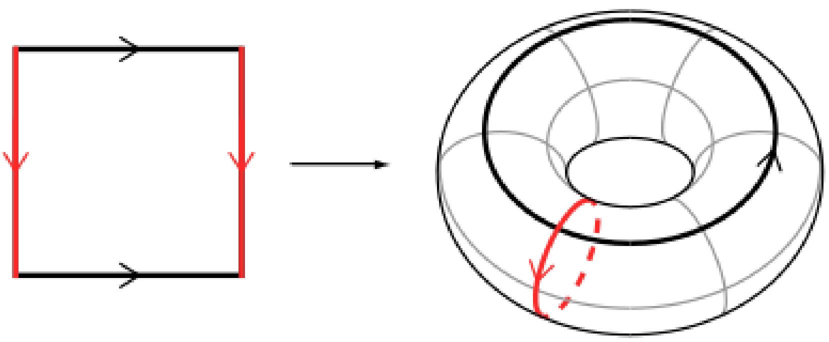


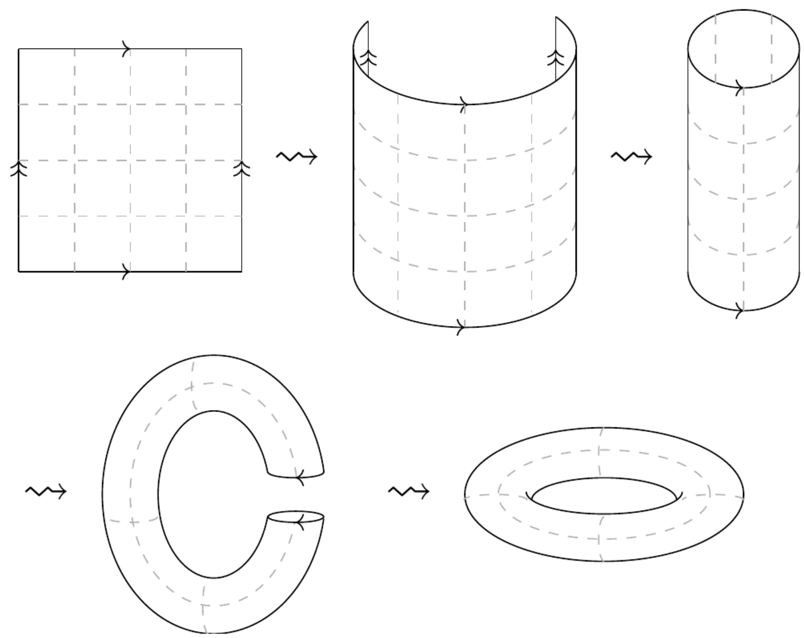
Παράδειγμα 1.39. *Ας θεωρήσουμε το τετράγωνο* $[0,1] \times [0,1]$ *με σχέση ισοδυναμίας* $(1, t-1) \sim (1, t), \forall t \in [0,1]$ *και* $(s, 0) \sim (s, 1), \forall s \in [0,1]$ *Τότε ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός, με μια επιφάνεια που ονομάζεται ταινία Möbius.*



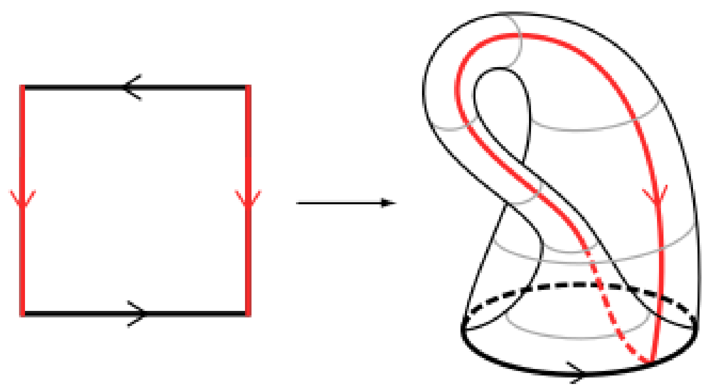


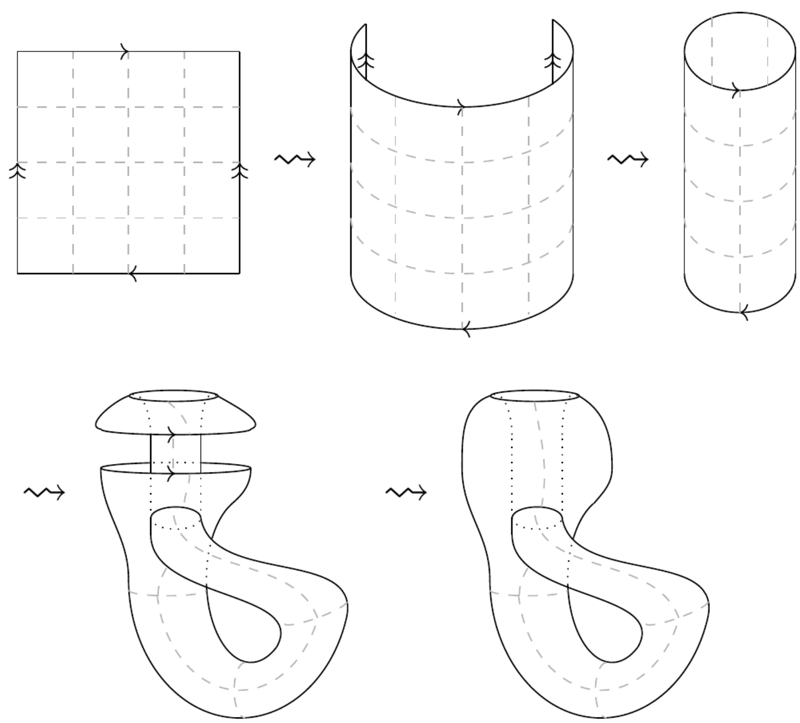
Παράδειγμα 1.40. *Ας θεωρήσουμε το τετράγωνο* $[0,1] \times [0,1]$ *με σχέση ισοδυναμίας* $(0, t) \sim (1, t), \forall t \in [0,1]$ *και* $(s, 0) \sim (s, 1), \forall s \in [0,1]$ *τότε ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός, με τον τόρο.*





Παράδειγμα 1.41. *Ας θεωρήσουμε το τετράγωνο* $[0,1] \times [0,1]$ *με σχέση ισοδυναμίας* $(0,t) \sim (1,t)\,, \forall t \in [0,1]$ *και* $(s,0) \sim (1-s,1)\,, \forall s \in [0,1]$ *Τότε ο χώρος πηλίκο είναι ομοιομορφικός, με μια επιφάνεια στον* $\mathbb{R}^4$ *που ονομάζεται η μποτίλια του Klein.*





Κεφάλαιο 2

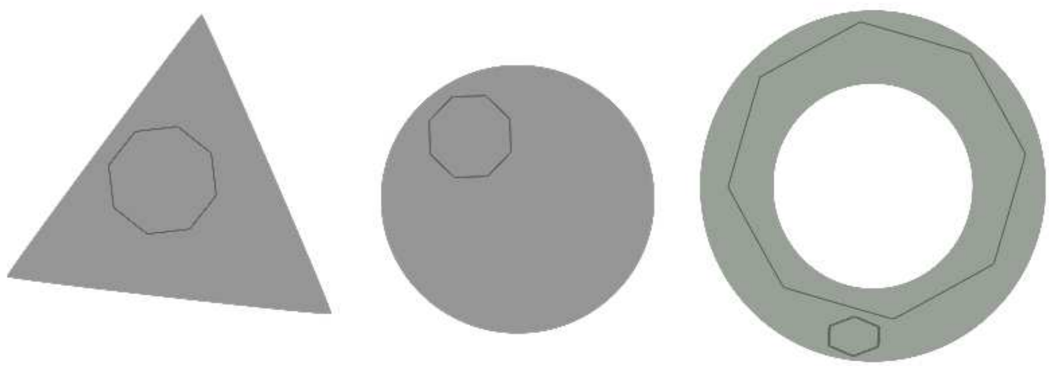
Τοπολογία και Γεωμετρία

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποια μαθηματικά προβλήματα που συνδέονται με την τοπολογία.

2.1 Ποιοτικές ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία που μαθαίνουμε στο λύκειο εξετάζουμε τα γεωμετρικά σχήματα σε σχέση με τις μετρικές ιδιότητες τους, δηλαδή με ιδιότητες που έχουν σχέση με μέτρηση, όπως το μήκος, το εμβαδόν ή ο όγκος. Για παράδειγμα ταυτίζουμε δύο τρίγωνα αν οι πλευρές τους είναι ίσες μία προς μία, συγκρίνουμε γωνίες, υπολογίζουμε εμβαδά και όγκους σχημάτων. Θεμελιώδη ρόλο σε αυτήν παίζουν θεωρήματα όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα που μας δίνει την σχέση του μήκους της υποτείνουσας ενός τριγώνου με τα μήκη των κάθετων πλευρών. Όμως κάποιες άλλες ιδιότητες των σχημάτων δεν εξετάζονται στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Για παράδειγμα αν παρατηρήσουμε την επιφάνεια που περικλείει ένα τρίγωνο, ένας κύκλος ή δύο ομόκεντροι κύκλοι (δακτύλιος) (Σχήμα 1) τα σχήματα αυτά έχουν κάποιες ιδιότητες κοινές και κάποιες που δεν είναι κοινές. Για παράδειγμα αν πάρουμε μια πολυγωνική καμπύλη μέσα εσωτερικό ενός τριγώνου τότε και το εσωτερικό της θα βρίσκεται επίσης στο εσωτερικό του τριγώνου. Το ίδιο συμβαίνει και αν πάρουμε μια πολυγωνική καμπύλη μέσα στο εσωτερικό ενός κύκλου ή μιας έλλειψης. Αυτήν την ιδιότητα όμως δεν την έχει ένας δακτύλιος. Αν πάρουμε μια πολυγωνική καμπύλη που βρίσκεται στο εσωτερικό ενός δακτυλίου τότε η περιοχή που εσωκλείει είναι δυνατόν να μην περιέχεται μέσα στον δακτύλιο

(Σχήμα 1). Σημειώστε επίσης ότι ακόμα και με τις έννοιες που ορίσαμε μέχρι τώρα δεν είναι δυνατόν να εκφράσουμε αυτήν την διαφορά! Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το εσωτερικό ενός τριγώνου, το εσωτερικό ενός κυρτού πολυγώνου, το εσωτερικό ενός κύκλου μοιράζονται μια κοινή ιδιότητα (ας πούμε διαισθητικά ότι δεν έχουν «τρύπες») την οποία δεν έχει ένας δακτύλιος.

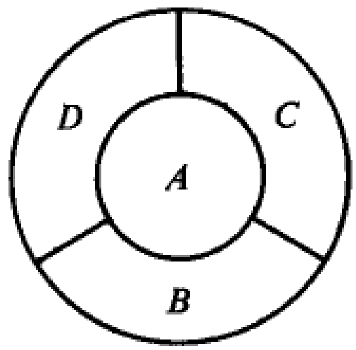


Σχήμα 1

Ένα σχετικό πρόβλημα στο οποίο έχουμε ήδη αναφερθεί είναι και το Θεώρημα του Jordan, που αναφέρει ότι κάθε απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο περιέχει «εσωτερικό» με την έννοια ότι χωρίζει το επίπεδο σε δύο περιοχές μια φραγμένη (το εσωτερικό της καμπύλης) και μια μη φραγμένη (το εξωτερικό της καμπύλης) που έχουν κοινό σύνορο την καμπύλη.

2.2 Το πρόβλημα χρωματισμού ενός χάρτη

Το 1878 ο Cayley ανακοίνωσε ένα «Θεώρημα», το οποίο απέδωσε στον De-Morgan που αναφέρει ότι αν έχουμε έναν χάρτη αρκούν τέσσερα χρώματα για να τον χρωματίσουμε, με τέτοιο τρόπο ώστε δύο γειτονικές χώρες να μην έχουν το ίδιο χρώμα. Το γεγονός ότι δεν αρκούν τρία χρώματα είναι προφανές όπως φαίνεται στο Σχήμα 2 όπου οι τέσσερεις χώρες στον χάρτη (που αναφέρονται σαν A, B, C, D απαιτούν τέσσερα χρώματα για να χρωματιστούν.

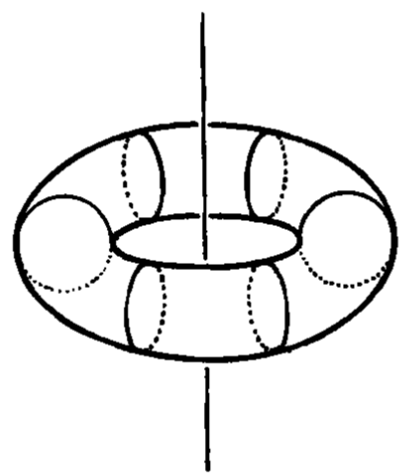


Σχήμα 2

Γενικεύοντας το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων θα μπορούσαμε να πούμε τα έξης: Αν έχουμε μία επιφάνεια καθορίζοντας τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων τα οποία είναι ικανά να χρωματίσουν τους πιθανούς χάρτες της επιφάνειας τέτοια ώστε ανά δύο περιοχές που συνορεύουν να έχουν διαφορετικό χρώμα, αυτός ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων ονομάζεται χρωματικός αριθμός της επιφάνειας.

Στην περίπτωση του επιπέδου ή της σφαίρας ο χρωματικός αριθμός είναι τέσσερα. Αλλά αυτό είναι μία υπόθεση που είναι δύσκολη να αποδειχθεί.

Για παράδειγμα, για τον τόρο (που είναι η επιφάνεια που δημιουργείται περιστρέφοντας τον κύκλο γύρω από μία μη τέμνουσα γραμμή στο επίπεδο (Σχήμα 3))

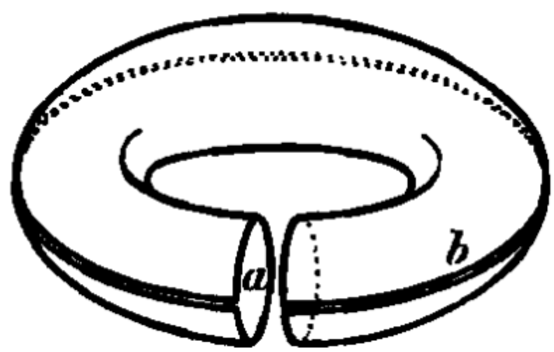


Σχήμα 3

έχει αποδειχθεί ότι ο χρωματικός αριθμός του είναι επτά. Παρακάτω θα δείξουμε ότι δεν επαρκούν λιγότερα από επτά χρώματα. Για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει να δείξουμε ότι είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε επτά περιοχές στον τόρο τέτοιες ώστε κάθε δυάδα περιοχών να συνορεύουν η μία στην άλλη με σύνορο μία καμπύλη.

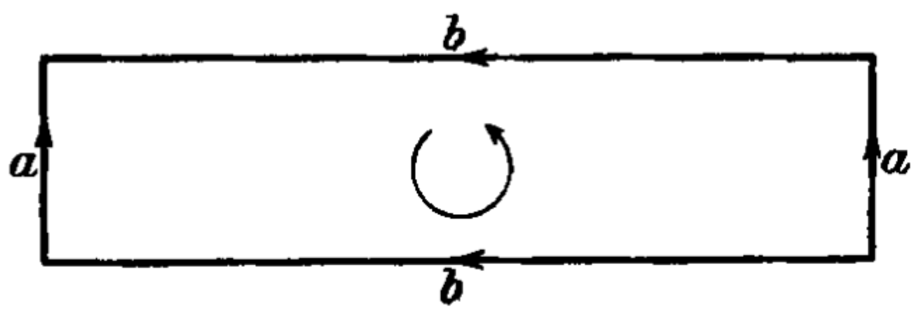
Η διαδικασία έχει ως εξής:

Κόβουμε τον τόρο κατά μήκος του γεννήτορα κύκλου, μετατρέποντας τον σε έναν παραμορφωμένο κύλινδρο όπως στο Σχήμα 4.



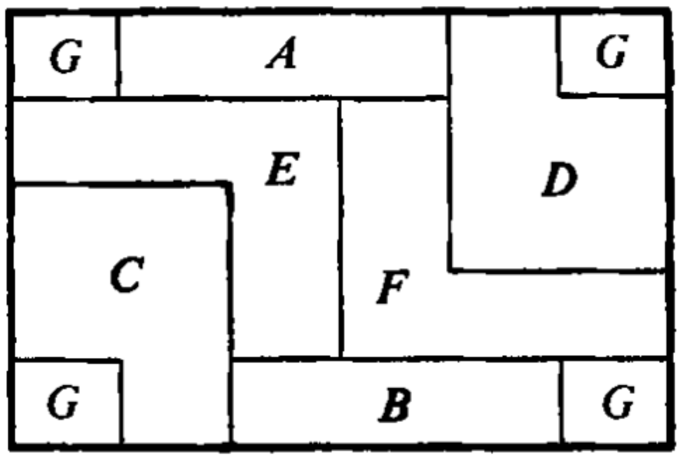
Σχήμα 4

Ισιώνουμε τον κύλινδρο και τον κόβουμε κατά μήκος της επιφάνειάς του και δημιουργούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Σχήμα 5).



Σχήμα 5

Τότε την κάθε περιοχή του τόρου μπορούμε να την αναπαραστήσουμε πάνω στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ένας διαχωρισμός του τόρου σε επτά περιοχές αναπαριστάται στο Σχήμα 6.



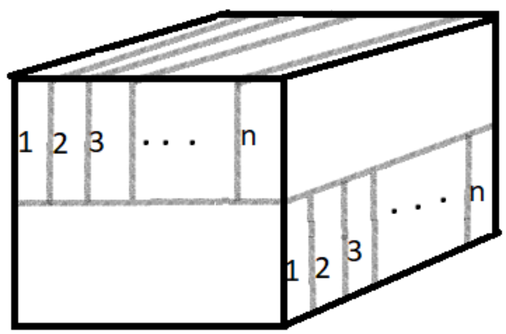
Σχήμα 6

Οι τέσσερις περιοχές G του ορθογώνιου παραλληλογράμμου δημιουργούν μία περιοχή στον τόρο και κάθε περιοχή χωρίζεται απο την άλλη μέσω μίας καμπύλης.

Το ανάλογο πρόβλημα δεν μπορεί να γενικευτεί για περιοχές του χώρου.

Έχει παρατηρηθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο n μπορούμε να κατασκευάσουμε n περιοχές στον χώρο τέτοιες ώστε ανά δύο από αυτές να συνορεύουν, έχοντας σύνορο μία επιφάνεια. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι χρειαζόμαστε n χρώματα για να χρωματίσουμε τις περιοχές. Το παραπάνω αποτέλεσμα διατυπώθηκε από τον Frederick Guthrie.

Παραθέτουμε ένα παράδειγμα για την κατανόηση του αποτελέσματος του Frederick Guthrie. Ας θεωρήσουμε έναν κύβο. Κόβουμε τον κύβο με ένα επίπεδο παράλληλο στην βάση του. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε δημιουργήσει δύο παραλληλεπίπεδα. Το κάθε ένα από αυτά τα δύο παραλληλεπίπεδα τα χωρίζουμε σε n ίσα τμήματα και τα αριθμούμε με τρόπο όπως φαινεται στο Σχήμα 7.Άρα έχουμε χωρίσει τον κύβο σε $2n$ περιοχές. Είναι προφανές ότι κάθε περιοχή συνορεύει με όλες τις υπόλοιπες, οπότε για να τις χρωματίσουμε θα χρειαστούμε $2n$ διαφορετικά χρώματα.



Σχήμα 7

2.3 Το πρόβλημα των γειτονικών περιοχών

Ένα πρόβλημα το οποίο σχετίζεται με το πρόβλημα του χρωματισμού ενός χάρτη είναι το εξής:

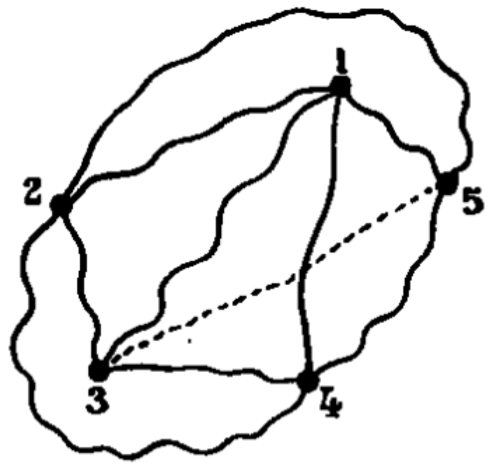
Για δοσμένη επιφάνεια, ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός περιοχών που μπορούμε να κατασκευάσουμε έτσι ώστε ανά δύο περιοχές να συνορεύουν μεταξύ τους με σύνορο μια καμπύλη;

Μπορούμε να δούμε ότι ο χρωματικός αριθμός μιας επιφάνειας είναι τουλάχιστον ίσος με αυτόν τον μέγιστο αριθμό περιοχών που γειτονεύουν. Για να χρωματίσουμε τις γειτονικές περιοχές ανά δύο είναι απαραίτητο να έχουμε τόσα χρώματα όσες και οι περιοχές. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, ο μέγιστος αριθμός γειτονικών περιοχών είναι τουλάχιστον τέσσερα.

Στην περίπτωση του τόρου η τιμή του χρωματικού αριθμού είναι ίση με τον μέγιστο αριθμό περιοχών που είναι ίση με επτά.

Ένα άλλο πρόβλημα είναι ο εντοπισμός του μέγιστου αριθμού σημείων σε μία δοσμένη επιφάνεια, τα οποία να ενώνονται ανά δύο με καμπύλες πάνω στην επιφάνεια χωρίς καμία να τέμνει την άλλη.

Για παράδειγμα, θεωρούμε πέντε σημεία στο επίπεδο. Είναι αδύνατον να ζωγραφίσουμε στο επίπεδο δέκα μη τέμνουσες καμπύλες που να ενώνουν κάθε σημείο με τα άλλα. Άρα παρατηρούμε ότι ο μέγιστος αριθμός σημείων τον οποίο μπορούμε να έχουμε στο επίπεδο, έτσι ώστε κάθε ένα σημείο να ενώνεται με τα άλλα με μία μη τέμνουσα καμπύλη είναι λιγότερο από πέντε, συγκεκριμένα είναι τέσσερα, (Σχήμα 8).



Σχήμα 8

Πιο γενικά, έχει δειχθεί ότι για κάθε επιφάνεια ο μέγιστος αριθμός σημείων με την παραπάνω ιδιότητα είναι ίσος με τον μέγιστο αριθμό γειτονικών περιοχών. Άρα, στην περίπτωση του τόρου ο μέγιστος αριθμός σημείων με την παραπάνω ιδιότητα είναι επτά.

2.4 Τοπολογικές ιδιότητες

Έστω ότι έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε κάποιο γεωμετρικό σχήμα από ένα ελαστικό υλικό χωρίς να προκαλούμε σχισίματα και τομές με τον εαυτό του. Τότε παρατηρούμε ότι οι κεντρικές ιδιότητες του σχήματος (μέτρο,εμβαδό,όγκος κ.τ.λ. ...) μεταβάλλονται. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν κάποιες ιδιότητες που μένουν αναλλοίωτες υπό τον μετασχηματισμό του σχήματος. Αυτές τις ιδιότητες τις ονομάζουμε *τοπολογικές ιδιότητες.* Για παράδειγμα θεωρούμε τον τόρο τον οποίο τον έχουμε μετατρέψει σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Σχήμα 5), σχηματίζουμε μία τυχαία μη τέμνουσα καμπύλη πάνω του. Έπειτα μετασχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο σε τόρο με την αντιστροφη μέθοδο που δείξαμε. Παρατηρούμε ότι οι κεντρικές ιδιότητες όπως το μήκος της καμπύλης έχουν αλλάξει.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε τον κύκλο με το ίδιο ελαστικό υλικό. Τότε μπορούμε να τον μετατρέψουμε σε τετράγωνο,έλλειψη και γενικά σε ότι σχήμα θέλουμε χωρίς σχισίματα και τομές με τον εαυτό του. Δηλαδή, μπορούμε με μία συνεχή διαδικασία να μετατρέψουμε τον κύκλο σε τετράγωνο ή γενικά σε ότι σχήμα θέλουμε. Την διαδικασία αυτή την ονομάζουμε *ομοιομορφισμό* την οποία ορίζουμε στη επόμενη ενότητα. Στην τοπολογία τα αντικείμενα που έχουν αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται *ομοιομορφικά*.

2.5 Η έννοια του ομοιομορφισμού

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετασχηματίσουμε ένα γεωμετρικό σχήμα σε ένα καινούριο σχήμα χωρίς τομές με τον εαυτό του και σχισίματα όπως έχει προαναφερθεί. Υπάρχουν δύο σημαντικές σχέσεις μεταξύ του αρχικού και του τελικού σχήματος που παίρνουμε από τον μετασχηματισμό οι οποίες είναι:

1. Σε κάθε σημείο του ενός σχήματος να αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο του άλλου σχήματος.

2. Δύο γειτονικά σημεία του ένος σχήματος να αντιστοιχούν σε δύο γειτονικά του άλλου.

Οι παραπάνω σχέσεις θα ορισθούν αυστηρά στη συνέχεια.

Έστω δύο σύνολα E και F, διακριτά ή όχι. Υποθέτουμε ότι για κάθε σημείο του E υπάρχει ένα σημείο στο F, το σημείο αυτό στο F μπορεί να αντιστοιχίζεται σε περισσότερα από ένα στοιχεία στο E, πιο γενικά θα μπορούσαμε να πούμε για κάθε σημείο του F υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο στο E που να αντιστοιχεί σε αυτό. Η παραπάνω διαδικασία ορίζει έναν μοναδικό μετασχηματισμό f του E στο F.

Παρακάτω όταν θα θεωρούμε μετασχηματισμό $f : E \to F$ θα υπονοούμε ότι είναι «επί», δηλαδή $\forall b \in F$ υπάρχει $a \in E$ ώστε $f(a) = b$. Αυτό συμβαίνει διότι μετασχηματίζοντας ένα σχήμα σε ένα καινούριο ποτέ δεν χάνουμε σημεία του αρχικού σχήματος.

Ορισμός 2.1. Έστω E και F δύο σύνολα και b σημείο του F το οποίο αντιστοιχεί σε ένα σημείο a του E. Τότε γράφουμε $b = f(a)$ και λέμε ότι το b είναι η *εικόνα* του a μέσω του μετασχηματισμού f.

Ορισμός 2.2. Έστω f ένας μετασχηματισμός του E στο F. Αν $a_1, a_2 \in E$ με $a_1 \neq a_2$ και $f(a_1), f(a_2) \in F$ με $f(a_1) \neq f(a_2)$ τότε η f ονομάζεται *ένα προς ένα* μετασχηματισμός.

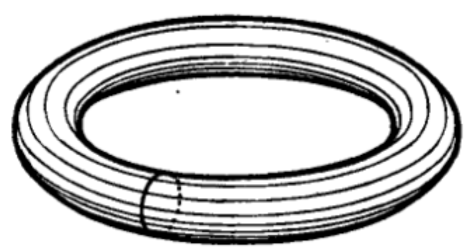
Ορισμός 2.3. Έστω $f : E \to F$ ένα προς ένα μετασχηματισμός. Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε σημείο b που ανήκει στο F υπάρχει μοναδικό σημείο a που ανήκει στο E τέτοιο ώστε $a = g(b)$ και $f(a) = b$. Το μετασχηματισμό $g : F \to E$ τον ονομάζουμε *αντίστροφο* του f και συμβολίζεται με f^{-1}.

Ορισμός 2.4. Έστω $(E, \mathcal{T}_E), (F, \mathcal{T}_F)$ τοπολογικοί χώροι και $f : E \to F$. Η f ονομάζεται *συνεχής* αν για κάθε $A \in \mathcal{T}_F$ η $f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_E$.

Ορισμός 2.5. Έστω $f : E \to F$ η οποία είναι ένα προς ένα, συνεχής και $f^{-1} : F \to E$ συνεχής. Τότε η f ονομάζεται *ομοιομορφισμός* ή *τοπολογικός μετασχηματισμός*.

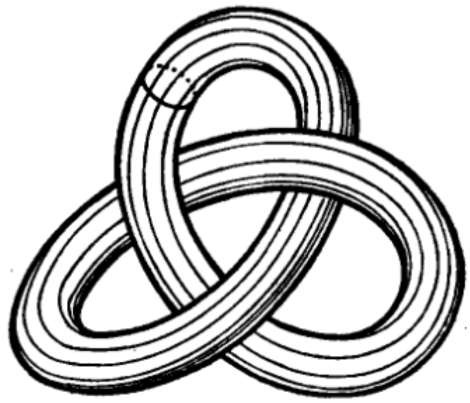
Για να εισάγουμε την έννοια του ομοιομορφισμού, χρησιμοποιήσαμε την έννοια του μετασχηματισμού ένος σχήματος χωρίς τομές με τον εαυτό του και σχισίματα. Στην πραγματικότητα η μέθοδος αυτή δεν είναι μοναδική για την επίτευξη ενός τοπολογικού μετασχηματισμού.

Για παράδειγμα, αν κόψουμε τον τόρο κατά μήκος του γεννήτορα κύκλου το αποτέλεσμα είναι μία επιφάνεια με μορφή σωληνοειδούς με αρχή και τέλος (Σχήμα 9).



Σχήμα 9

Έπειτα στρίβουμε κατάλληλα αυτήν την επιφάνεια ώστε να σχηματιστεί ένας κόμπος. Τέλος ενώνουμε της δύο άκρες με αποτέλεσμα να έχουμε έναν κλειστό κόμπο χωρίς αρχή και τέλος (Σχήμα 10).



Σχήμα 10

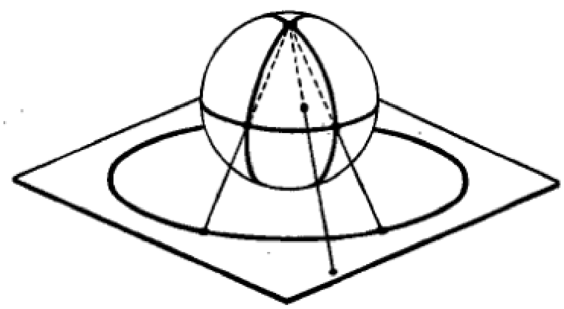
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει ένας ομοιομορφισμός μεταξύ του κόμπου και του τόρου. Στην παραπάνω διαδικασία κατασκευάσαμε έναν ομοιομορφισμό με τα εξής βήματα : κόβοντας, μετασχηματίζοντας και κολλώντας. Αυτό το παράδειγμα μας δείχνει ότι η κατασκευή ενός ομοιομορφισμού δεν γίνεται με μοναδικό τρόπο.

Υποθέτουμε ότι E και F είναι δύο ομοιομορφικά σχήματα και έστω ένα τρίτο σχήμα G το οποίο είναι ομοιομορφικό με το F τότε το E είναι ομοιομορφικό με το G, δηλαδή ο ομοιομορφισμός είναι μεταβατικός.

Δύο σχήματα λέγονται *επικαλύπτοντα* εάν το ένα μπορεί να γίνει κάλυψη του άλλου με μετατόπιση και μεγέθυνση. Έστω E και G δύο σχήματα, για να δείξουμε ότι είναι ομοιομορφικά αρκεί να δείξουμε ότι το E είναι ομοιομορφικό με ένα σχήμα F το οποίο είναι επικαλύπτον του G.

Για παράδειγμα θεωρούμε μία σφαίρα S και ένα τετράεδρο T. Θα δείξουμε ότι είναι ομοιομορφικά. Θεωρούμε μία δεύτερη σφαίρα S' την οποία έχουμε τοποθετήσει εσωτερικά του τετραέδρου. Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η σφαίρα S' είναι επικαλύπτον της σφαίρας S. Καθώς η S' είναι εγγεγραμμένη στο τετράεδρο μπορούμε να προβάλουμε την επιφάνειά της στην επιφάνεια του τετραέδρου με την χρήση της προβολής από κέντρο της σφαίρας. Άρα έχουμε έναν ομοιομορφισμό από την S' στο T. Από τα παραπάνω μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός από την S στο T.

Το επόμενο παράδειγμα που αναφέρουμε ονομάζεται στερεογραφική προβολή. Έστω S η επιφάνεια μιας σφαίρας. Ας υποθέσουμε ότι αφαιρούμε το σημείο του βόρειου πόλου αυτής. Έστω T να είναι ένα επίπεδο το οποίο εφάπτεται στο νότιο πόλο (Σχήμα 11).



Σχήμα 11

Θεωρούμε την προβολή από την σφαίρα στο επίπεδο που δημιουργείται με αρχή τον βόρειο πόλο, δηλαδή ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας απεικονίζεται σε ένα σημείο πάνω στο επίπεδο μέσω της ευθείας που ξεκινά από τον βόρειο πόλο και διέρχεται από ένα σημείο της σφαίρας. Παρατηρούμε ότι η στερεογραφική προβολή είναι ένας ομοιομορφισμός που δημιουργήθηκε με την αφαίρεση ενός σημείου της επιφάνειας S.

2.6 Τοπολογία, συνεχής γεωμετρία

Τοπολογία είναι ο μοντέρνος κλάδος της γεωμετρίας ο οποίος όπως έχουμε δει δεν ασχολείται καθόλου με τις έννοιες του μεγέθους ή του μέτρου αλλά μόνο με την έννοια της συνέχειας. Αυτό με το οποίο ασχολείται κυρίως η τοπολογία είναι η ποιοτικές ιδιότητες.

Μία ιδιότητα ενός συνόλου λέγεται *τοπολογική* εάν μπορεί να εκφραστεί μέσω της έννοιας της συνέχειας. Μια τοπολογική ιδιότητα ενός συνόλου καλείται τοπολογικά αμετάβλητη αν διατηρείται από τους ομοιομορφισμούς. *Τοπολογία είναι η μελέτη των τοπολογικών ιδιοτήτων και πιο συγκεκριμένα των τοπολογικών αμετάβλητων εννοιών των σχημάτων.*

Πρέπει να αναφέρουμε ότι μια τοπολογική ιδιότητα ενός συνόλου δεν είναι απαραίτητα τοπολογικά αμετάβλητη, σε αυτήν την περίπτωση η ιδιότητα λέγεται *σχετική*. Δύο ομοιομορφικά σύνολα E και F είναι δυνατόν να έχουν διαφορετικές τοπολογικές ιδιότητες, αλλά αυτό δεν οφείλεται μόνο στα σύνολα E και F αλλά και στον χώρο τον οποίο περιέχονται.

Καθώς οι κύριες ιδιότητες που μελετά η τοπολογία είναι οι τοπολογικές αμετάβλητες, δύο σύνολα λέγονται *τοπολογικά ίσα* εάν έχουν τις ίδιες τοπολογικές αμετάβλητες. Αν έχουμε δύο ομοιομορφικά σύνολα τότε είναι τοπολογικά ίσα.

Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι η σχέση του ομοιομορφισμού μεταξύ συνόλων είναι σχέση ισοδυναμίας με την εξής έννοια:

1. Κάθε σύνολο G είναι ομοιομορφικό με τον εαυτό του.

2. Αν ένα σύνολο A είναι ομοιομορφικό με το G τότε και το G είναι ομοιομορφικό με το A.

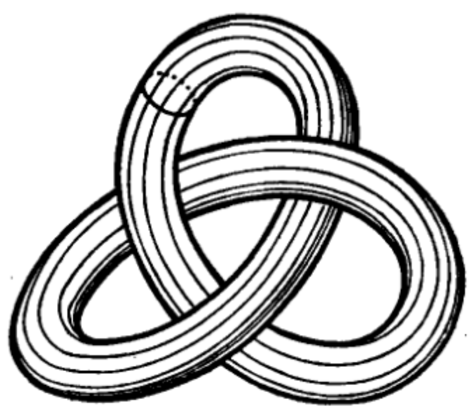
3. Έστω A να είναι ομοιομορφικό με το G και G ομοιομορφικό με το Z, τότε A είναι ομοιομορφικό με το Z.

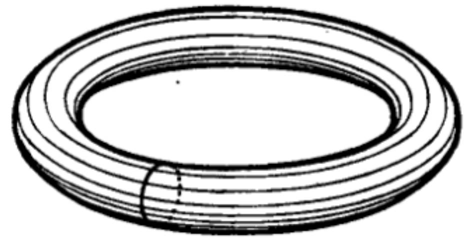
Συνεπώς, υπάρχουν κλάσεις ισοδυναμίας μεταξύ των συνόλων οι οποίες κατασκευάζονται απο την σχέση του ομοιομορφισμού και λέγονται *τοπολογικές κλάσεις*. Άρα με αυτόν τον τρόπο ορίζονται δύο κλάσεις, η κλάση τον ομοιομορφικών συνόλων και η κλάση των μη-ομοιομορφικών συνόλων οι οποίες είναι φανερό ότι είναι ξένες μεταξύ τους.

2.7 Σχετικές τοπολογικές ιδιότητες

Όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, δύο ομοιομορφικά σχήματα έχουν τις ίδιες τοπολογικές αμετάβλητες, μπορούν όμως να έχουν διαφορετικές τοπολογικές ιδιότητες οι οποίες δεν οφείλονται απαραίτητα σε αυτά αλλά στους χώρους που τα περιέχουν.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τον τόρο και την επιφάνεια ενός κόμπου (Σχήμα 12). Αυτά τα δύο σχήματα είναι ομοιομορφικά. Αλλά μπορούμε να δείξουμε ότι δεν υπάρχει ομοιομορφισμός ολόκληρου του χώρου στον εαυτό του τέτοιος ώστε ο τόρος να μετατρέπεται στην επιφάνεια του κόμπου.





Σχήμα 12

Γενικότερα, λέμε ότι δύο σχήματα έχουν τοπολογικά την *ίδια θέση στον χώρο* εάν μπορούμε να περάσουμε από το ένα σχήμα στο άλλο με έναν ομοιομορφισμό του χώρου στον εαυτό του. Αν ισχύει η προηγούμενη συνθήκη τότε τα δύο σχήματα είναι ομοιομορφικά, σε αντίθεση με ότι είδαμε παραπάνω όπου δεν αληθεύει ότι δύο ομοιομορφικά σχήματα έχουν την ίδια θέση στον χώρο.

Ορισμός 2.6. Μία τοπολογική ιδιότητα ενός σχήματος θα ονομάζεται *σχετική* εάν εξαρτάται από την θέση του σχήματος στον χώρο.

Ορισμός 2.7. Εστω E ένα σχήμα, $a \in E$. Μία *περιοχή* του E ορίζουμε να είναι οποιοδήποτε σύνολο V που περιέχεται στο σύνολο τέτοιο ώστε για κάθε $a \in E$ υπάρχει ανοικτός δίσκος με κέντρο το a και θετική ακτίνα που να περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο V.

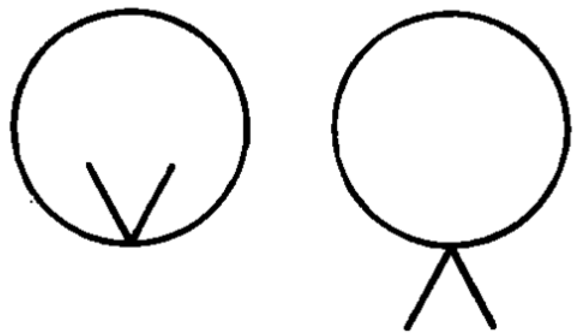
Υπάρχουν τρία είδη ομοιομορφισμού μεταξύ δύο σχημάτων E και F στο επίπεδο:

1. Υπάρχει ομοιομορφισμός ολόκληρου του επιπέδου στον εαυτό του μετασχηματίζοντας το E στο F.

2. Κανένας ομοιομορφισμός του επιπέδου στον εαυτό του δεν μετασχηματίζει το E στο F, αλλά μπορούμε να περάσουμε με έναν ομοιομορφισμό από το E στο F μεταξύ μιας περιοχής του E σε μια περιοχή του F.

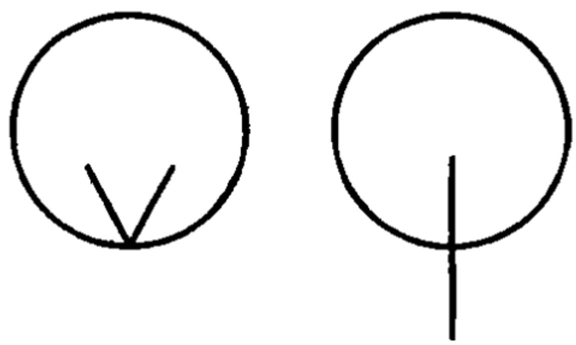
3. Να μην υπάρχει ομοιομορφισμός μεταξύ περιοχών του E και F, αλλά να υπάρχει ομοιομορφισμος μεταξύ του E και F.

Με βάση τα τρία είδη που αναφέρθηκαν θα δώσουμε μερικά παραδείγματα. Για την περίπτωση 1, σαν παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε δύο κλειστές καμπύλες Jordan. Για την περίπτωση 2, μπορούμε να θεωρήσουμε τα σχήματα E και F όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.



Σχήμα 13

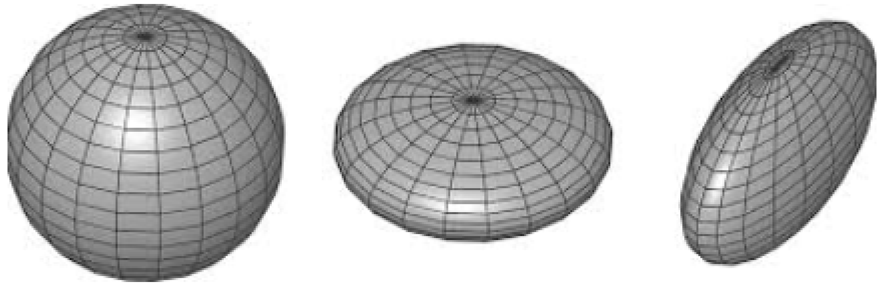
Για την περίπτωση 3 μπορούμε να θεωρήσουμε τα σχήματα E και F όπως φαίνεται στο Σχήμα 14.



Σχήμα 14

Στη συνέχεια θα ορίσουμε δύο σημαντικές έννοιες της τοπολογίας, την ισοτοπία και την ομοτοπία.

Θεωρούμε την επιφάνεια της σφαίρας. Παρατηρούμε ότι είναι δυνατόν η επιφάνεια της σφαίρας να μετασχηματιστεί σε επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ενδιάμεσο στάδιο του μετασχηματισμού να παραμένει ομοιομορφικό με την αρχική επιφάνεια της σφαίρας.(Σχήμα 15)



Σχήμα 15

Όπως είδαμε η επιφάνεια του τόρου μπορεί να μετασχηματιστεί στην επιφάνεια ενός κόμπου, προκειμένου να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να κόψουμε τον τόρο κατα μήκος του γεννήτορα κύκλου και με αυτό τον τρόπο παίρνουμε ένα σωληνοειδές με αρχή και τέλος. Μπορούμε να δείξουμε ότι ο τόρος δεν είναι ομοιομορφικός με αυτό το σωληνοειδές. Αυτό οφείλεται στο ότι το σωληνοειδές έχει αρχή και τέλος ενώ ο τόρος όχι. Γενικότερα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι αδύνατον να μετασχηματίσουμε τον τόρο στην επιφάνεια του κόμπου με συνεχή τρόπο.

Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν σε δύο ορισμούς.

Ορισμός 2.8. Λέμε ότι δύο σχήματα E και F είναι *ισοτοπικά* στον χώρο εάν μπορούμε να περάσουμε από το E στο F με μία συνεχή οικογένεια ομοιομορφισμών τέτοια ώστε κάθε σχήμα που προκύπτει (μέχρι την κατασκευή του F) να είναι ομοιομορφικό με το E. Πιο γενικά, το E θα λέγεται *ομοτοπικό* με το F στον χώρο εάν μπορούμε να περάσουμε από το E στο F μέσω μίας συνεχής οικογένειας μονότιμων συνεχών μετασχηματισμών.

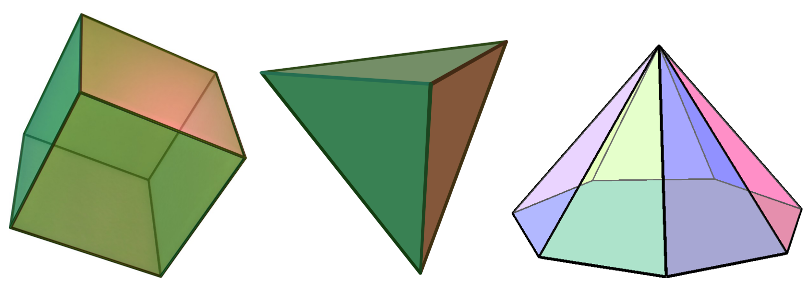
Κεφάλαιο 3

Τοπολογικές έννοιες σχετικές με επιφάνειες

3.1 Το Θεώρημα του Descartes

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να αναλύσουμε το θεώρημα του Descartes και να δούμε πως καταλήγουμε στην περίφημη σχέση (3.1) του Descartes.

Ας θεωρήσουμε κάποια στερεά σχήματα στον χώρο:



Το πρώτο είναι ένας κύβος, έχει 8 κορυφές, 12 ακμές και 6 έδρες

$$8 - 12 + 6 = 2$$

Το δεύτερο είναι ένα τετράγωνο, έχει 4 κορυφές, 6 ακμές και 4 έδρες

$$4 - 6 + 4 = 2$$

Το τρίτο είναι μια επταεδρική πυραμίδα, έχει 8 κορυφές, 14 ακμές και 8 έδρες

$$8 - 14 + 8 = 2$$

και στις τρεις περιπτώσεις ισχύει ότι ο αριθμός των κορυφών μείον τον αριθμό των ακμών συν τον αριθμό των εδρών κάνει πάντα δύο. Ο Descartes παρατήρησε ότι αυτό συμβαίνει σε οποιοδήποτε «πολυεδρικό σχήμα» και αν θεωρούσε, όσο περίπλοκο και αν ήταν είτε κυρτό είτε μη κυρτό και έτσι διατύπωσε σαν θεώρημα ότι για κάθε πολύεδρο ισχύει η σχέση

$$n_v - n_e + n_f = 2 \tag{3.1}$$

όπου n_v, n_e, n_f είναι ο αριθμός των κορυφών, ο αριθμός των ακμών και ο αριθμός των εδρών του πολυέδρου αντίστοιχα.Το ότι σχέση (3.1) ισχύει για όλα τα πολύεδρα αναφέρεται και σαν θεώρημα του Descartes ή πιο συχνά σαν τύπος του Euler δεδομένου ότι ο Euler έδωσε την πρώτη απόδειξη. Όμως μπορεί κάποιος να βρει παραδείγματα «πολυέδρων» που φαίνεται να μην ισχύει, αν κάποιος θεωρήσει σαν πολύεδρο κάτι που « έχει κορυφές, πλευρές, έδρες» δηλαδή σαν μια ένωση από πολύγωνα μέσα στο χώρο. Αυτό που ουσιαστικά λείπει είναι τι ακριβώς σημαίνει πολύεδρο, δηλαδή να δοθεί ένας ακριβής ορισμός της έννοιας αυτής.

Ορισμός 3.1. Ένα *πολύεδρο* είναι ένα σύστημα πεπερασμένου αριθμού πολυγώνων τα οποία βρίσκονται σε αμοιβαία σχέση μεταξύ τους έτσι ώστε οι επόμενες τέσσερις σχέσεις να ικανοποιούνται:

1. Κάθε δυάδα πολυγώνων του συστήματος να μην έχει κανένα κοινό εσωτερικό σημείο.

2. Για κάθε πλευρά του πολυγώνου του συστήματος υπάρχουν μόνο δύο πολύγωνα που έχουν αυτήν σαν κοινή πλευρά. Αυτή καλείται *ακμή* του πολυέδρου.

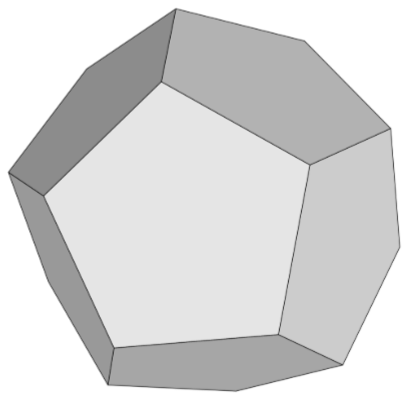
3. Κάθε δυάδα πολυγώνων του συστήματος $p, p^{'}$, μπορούν να γραφούν σε μορφή ακολουθίας ως $p_1 = p, p_2, p_3, ..., p_n = p^{'}$, όπου p_i, $i = 1, 2, ...n$ πολύγωνα του συστήματος τέτοια ώστε κάθε ένα από αυτά να έχουν κοινή πλευρά με το επόμενο δηλάδή p_i να έχει κοινή πλευρά με το p_{i+1}.

4. Για κάθε κορυφή τα πολύγωνα μπορούν να τοποθετηθούν σε κυκλική σειρά έτσι ώστε κάθε δύο πολύγωνα να έχουν μία κοινή πλευρά που περνάει από αυτήν την κορυφή.

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό όταν κάνουμε αναφορά στην έννοια του πολυέδρου θα εννοούμε μόνο την επιφάνειά του και όχι το εσωτερικό του.

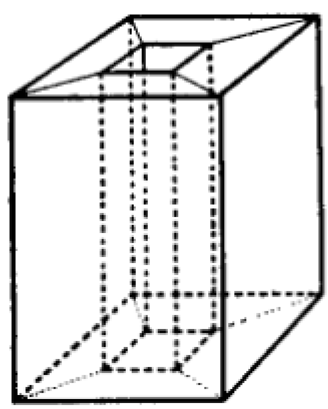
Τα πιο σημαντικά πολύεδρα είναι αυτά που ονομάζονται *απλά*.

Ορισμός 3.2. Ένα πολύεδρο θα ονομάζεται *απλό* εάν μπορούμε με συνεχή τρόπο να το μετατρέψουμε στην επιφάνεια μιας σφαίρας.



Σχήμα 1
Παράδειγμα ενός *απλού* πολύεδρου.

Στο παρακάτω σχήμα παραθέτουμε ένα παράδειγμα ενός μη-*απλού* πολυέδρου. (Σχήμα 2)

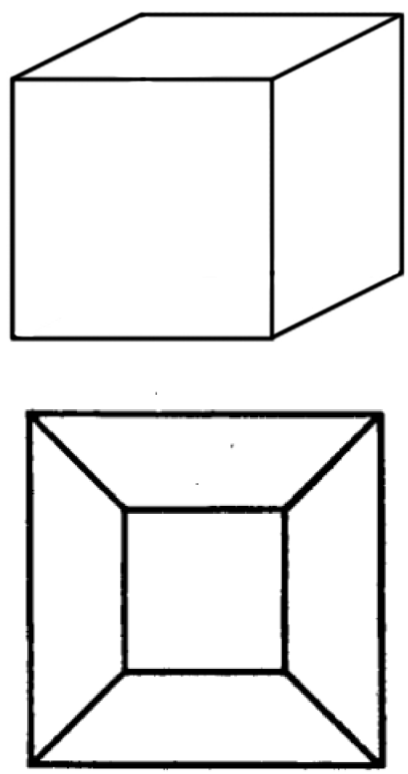


Σχήμα 2

Θεώρημα 3.3 (Descartes). *Θεωρούμε ένα απλό πολύεδρο. Αν n_v, n_e, n_f είναι οι αριθμοί των κορυφών,των ακμών και των εδρών του πολυέδρου αντίστοιχα,* *ικανοποιούν την εξής σχέση:*

$$n_v - n_e + n_f = 2.$$

Θεωρούμε ένα *απλό* πολύεδρο το οποίο είναι κατασκευασμένο από ένα ελαστικό υλικό. Επιλέγουμε μία έδρα και την κόβουμε κατά μήκος των ακμών της και στην συνέχεια την αφαιρούμε. Το υπολοιπόμενο πολύεδρο το τεντώνουμε με τρόπο ώστε να δημιουργηθεί ένα επίπεδο κομμάτι όπου κάθε έδρα να μετατρέπεται σε ένα πολύγωνο με ίδιο αριθμό κορυφών όπως το αρχικό σχήμα. Με αυτόν τον τρόπο πέρνουμε ένα δίκτυο πολυγώνων στο επίπεδο. (Σχήμα 3)



Σχήμα 3
Δίκτυο πολυγώνων στο επίπεδο του κύβου.

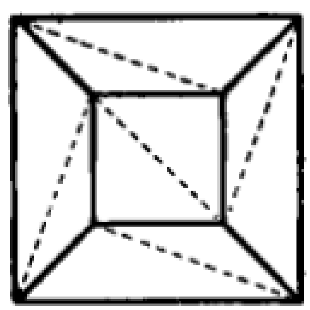
Έστω ότι έχουμε το δίκτυο πολυγώνων στο επίπεδο. Ο αριθμός των κορυφών και των ακμών είναι ο ίδιος με αυτον του πολυέδρου. Παρ' όλα αυτά ο αριθμός των πολυγώνων είναι ένας λιγότερος από αυτόν των εδρών του πολυέδρου, καθώς η μία έδρα του πολυέδρου αφαιρέθηκε, αυτό μας οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα. Η τιμή της έκφρασης $n_v - n_e + n_f$ είναι μία λιγότερη για το δίκτυο πολυγώνων στο επίπεδο σε σχέση με την τιμή της έκφρασης του αντίστοιχου πολύεδρου, δηλαδή για το δίκτυο πολυγώνων ισχύει

$$n_v - n_e + n_f = 1$$

και για τα *απλά* πολύεδρα ισχύει

$$n_v - n_e + n_f = 2.$$

Εάν στο δίκτυο πολυγώνων υπάρχουν κάποια πολύγωνα τα οποία δεν είναι τρίγωνα τότε τα μετατρέπουμε σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας τις διαγωνίους όπως στο Σχήμα 4.

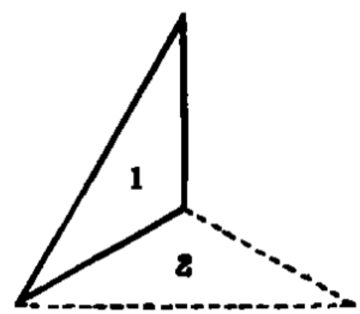


Σχήμα 4

Κάθε φορά που προσθέτουμε μία διαγώνιο ο αριθμός των πολυγώνων θα αυξάνεται κατά ένα. Επίσης ο αριθμός των πλευρών θα αυξηθεί κατά ένα σε αντίθεση με τις κορυφές που μένουν ίδιες. Ως εκ τούτου η πρόσθεση μιας διαγωνίου δεν επιδρά στην τιμή της έκφρασης $n_v - n_e + n_f$. Άρα σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να μετατρέψουμε το δίκτυο πολυγώνων σε ένα άλλο δίκτυο αποτελούμενο από δίκτυα και παρ' όλα αυτά η τιμή της παραπάνω έκφρασης να μην αλλάζει.

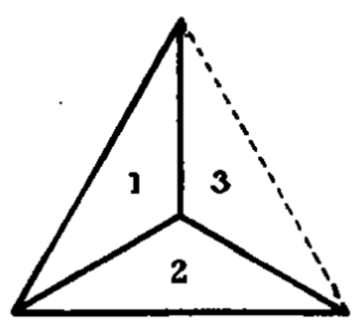
Ένας άλλος τρόπος να πάρουμε ένα όμοιο δίκτυο τριγώνων είναι να ξεκινήσουμε με ένα απλό τρίγωνο στο επίπεδο και θα κατασκευάσουμε το δίκτυο τριγώνων με τις εξής δύο πράξεις:

1. Προσθέτουμε ένα τρίγωνο το οποίο θα έχει μία κοινή πλευρά με το αρχικό και μία κορυφή η οποία βρίσκεται στην μερία της πλευράς που δεν βρίσκεται το αρχικό τρίγωνο (Σχήμα 5).



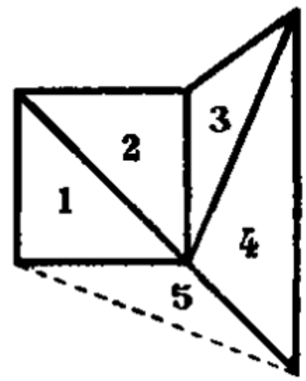
Σχήμα 5

2. Συμπληρώνουμε την πλευρά που λείπει ώστε να δημιουργηθεί ένα καινούριο τρίγωνο όπου οι δύο του πλευρές είναι πλευρές των άλλων τριγώνων (Σχήμα 6).



Σχήμα 6

Παρατηρούμε ότι καμία από τις δύο πράξεις δεν επηρεάζουν την τιμή της παράστασης $n_v - n_e + n_f$. Μια πράξη της μορφής (1) αυξάνει κατά ένα τον αριθμό των ακμών όπως και τον αριθμό των τριγώνων και αυξάνει κατά δύο τον αριθμό των πλευρών. Άρα έχουμε η έκφραση $n_v - n_e + n_f$ για το δίκτυο τριγώνων είναι ίδια όπως και στο αρχικό τρίγωνο. Δηλαδή, $n_v - n_e + n_f = 3 - 3 + 1 = 1$ και άρα για το δίκτυο τριγώνων και για το δίκτυο πολυγώνων έχουμε $n_v - n_e + n_f = 1$.

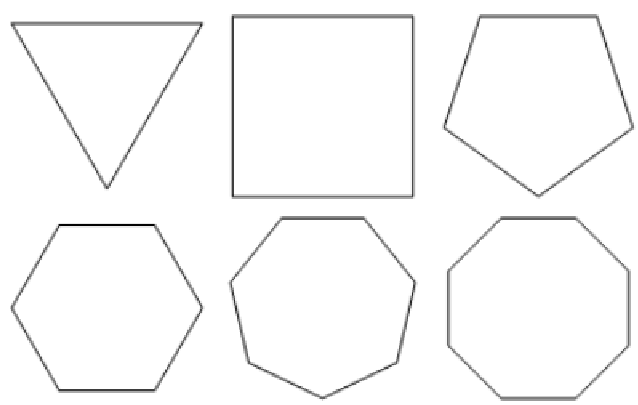


Σχήμα 7
Αποτέλεσμα μετά από 4 διαδοχικές πράξεις.

3.2 Πόσα κανονικά απλά πολύεδρα υπάρχουν

Μία εφαρμογή του θεωρήματος Descartes. Θα υπολογίσουμε το πλήθος των κανονικών *απλών* πολυέδρων, αφού πρώτα παραθέσουμε του εξής ορισμούς:

Ορισμός 3.4 (Κανονικό πολύγωνο)**.** *Κανονικό πολύγωνο* ονομάζεται το πολύγωνο που έχει όλες τις πλευρές και γωνίες ίσες. (Σχήμα 8)



Σχήμα 8

Ορισμός 3.5 (Κανονικό πολύεδρο)**.** *Κανονικό πολύεδρο* ονομάζεται το πολύεδρο που όλες οι έδρες του είναι ίσα κανονικά πολύγωνα, τα οποία ενώνονται γύρω από κάθε κορυφή με τις γωνίες που σχηματίζονται να είναι ίσες.

Θεωρούμε ένα κανονικό *απλό* πολύεδρο το οποίο έχει h ακμές που καταλήγουν σε κάθε κορυφή και κάθε έδρα έχει k πλευρές. Τότε μπορούμε να εξάγουμε τις εξής δύο σχέσεις:

$$hn_v = 2n_e = kn_f.$$

Από το θεώρημα Descartes και με την χρήση της παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$2n_e/h - n_e + 2n_e/k = 2,$$

αυτή μπορεί να απλοποιηθεί και να πάρει την μορφή

$$1/n_e = 1/h + 1/k - 1/2.$$

Γενικά, για κάθε πολύεδρο ισχύει ότι $h \geq 3$ και $k \geq 3$, στην περίπτωση που και οι δύο αριθμοί h, k είναι αυστηρά μεγαλύτεροι του 3 τότε έχουμε:

$$1/n_e = 1/h + 1/k - 1/2 \leq 1/4 + 1/4 - 1/2 = 0,$$

το οποίο προφανώς είναι άτοπο. Οπότε ένας από τους δύο αριθμούς πρέπει να είναι ίσος με 3. Έστω ότι $k = 3$. Τότε θα έχουμε ότι

$$1/n_e = 1/h - 1/6$$

Παρατηρώντας προσεκτικά την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει το h είναι 3,4 και 5. Καθώς για οποιαδήποτε τιμή μεγαλύτερη του 5 το αποτέλεσμα θα ήταν αρνητικό ή ίσο με μηδέν και για τιμές 1 και 2 δεν υφίσταται όπως έχουμε αναφέρει διότι το $h \geq 3$.

Στην περίπτωση όπου το $k = 3$ και το $h = 3, 4, 5$ έχουμε ότι $n_e = 6, 12, 30$ αντίστοιχα. Όμοια εάν το $h = 3$ και $k = 3, 4, 5$ τότε το $n_e = 6, 12, 30$ αντίστοιχα.

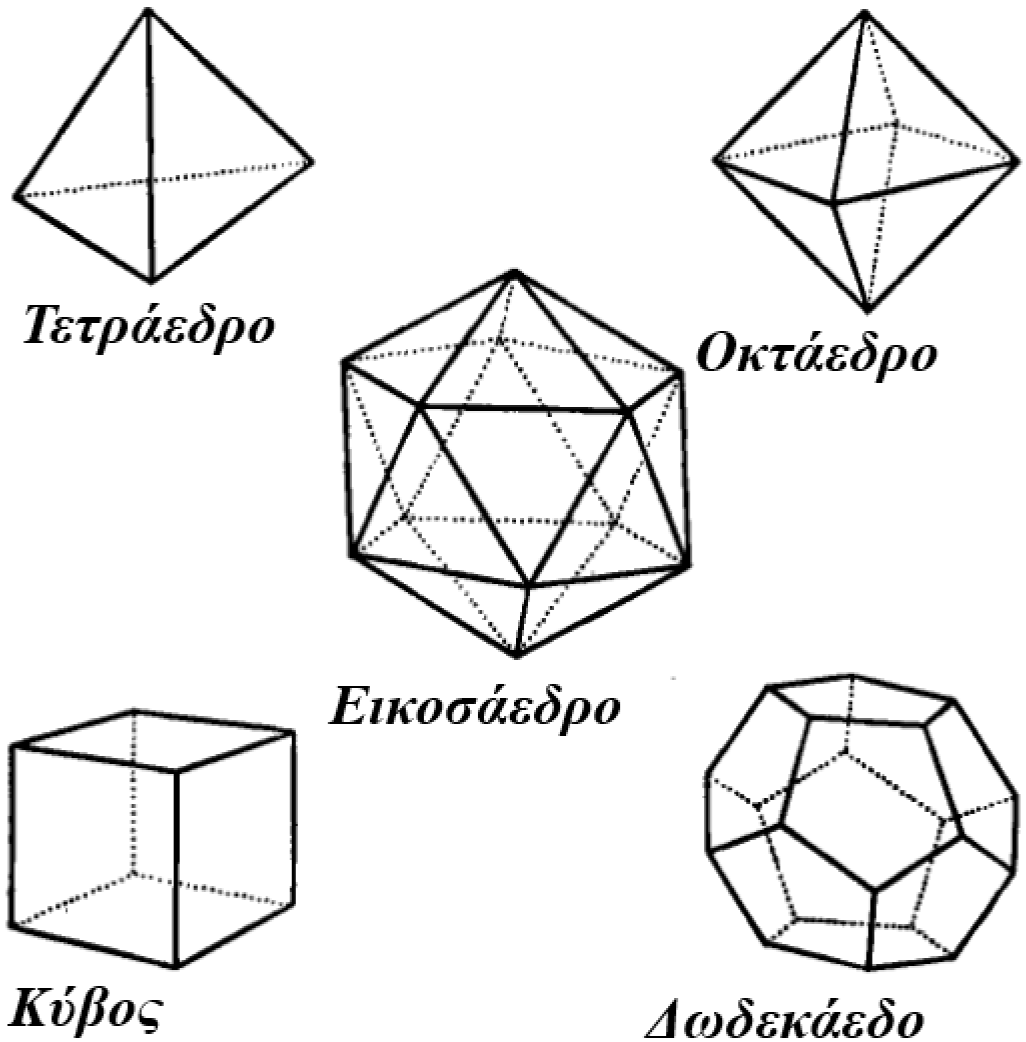
Οι περιπτώσεις όπου οι αριθμοί h, k, n ικανοποιούν την σχέση $1/n_e = 1/h + 1/k - 1/2$ είναι 5 και παραθέτονται στον παρακάτω πίνακα:

h	k	n_e
3	3	6
4	3	12
5	3	30
3	4	12
3	5	30

Με την βοήθεια της σχέσης $hn_v = 2n_e = kn_f$ και $2n_e/h - n_e + 2n_e/k = 2$ μπορούμε να βρούμε τα n_v και n_f τα οποία δίνονται στον επόμενο πίνακα:

Όνομα κανονικού simple πολυέδρου	n_v	n_e	n_f	h	k
Τετράεδρο	4	6	4	3	3
Οκτάεδρο	6	12	8	4	3
Εικοσάεδρο	12	30	20	5	3
Κύβος	8	12	6	3	4
Δωδεκάεδρο	20	30	12	3	5

Καταλήγοντας υπάρχουν 5 κανονικά *απλά* πολύεδρα όπως φαίνονται στο Σχήμα 9 :



Σχήμα 9

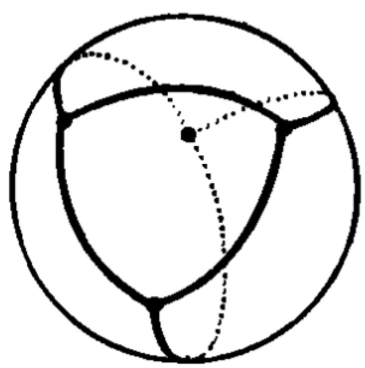
Αυτά τα 5 είδη κανονικών *απλών* πολυέδρων ήταν γνωστά από τα αρχαία ελληνικά χρόνια από τον Έλληνα φιλόσοφο Πλάτωνα και γι΄ αυτό το λόγο τα λέμε και Πλατωνικά στερεά.

3.3 Χαρακτηριστική μιας επιφάνειας

Έστω ένα *απλό* πολύεδρο, τότε μπορούμε να το μετατρέψουμε στην επιφάνεια μιας σφαίρας όπως έχει αναφερθεί σε προηγούμενη ενότητα. Το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας θα είναι να έχουμε ένα δίκτυο πολυγώνων πάνω στην σφαίρα δηλαδή έχουμε καταφέρει να διαιρέσουμε την σφαίρα με κάποια είδη καμπυλωτών πολυγώνων τα οποία αντιπροσωπεύουν τις έδρες του πολυέδρου.

Ορισμός 3.6 (Κυρτό πολύγωνο)**.** Ένα πολύγωνο ονομάζεται κυρτό αν και μόνο αν για κάθε δύο σημεία του το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει να περιέχεται μέσα του.

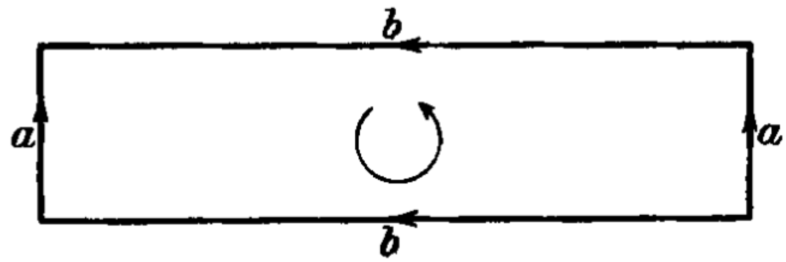
Αντίστοιχα, εάν κάποιος διαιρέσει την επιφάνεια μιας σφαίρας σε ένα πεπερασμένο αριθμό κυρτών πολυγώνων με τρόπο ώστε για κάθε κυρτή ακμή να υπάρχουν μόνο δύο κυρτά πολύγωνα που να έχουν αυτήν την ακμή κοινή τότε μπορούμε να μετατρέψουμε την σφαίρα σε ένα *απλό* πολύεδρο με έδρες τα καμπυλωτά πολύγωνα της σφαίρας (Σχήμα 10).



Σχήμα 10

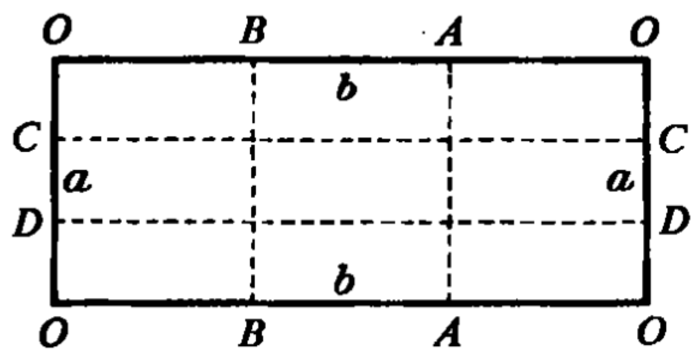
Όπως έχουμε αναφέρει παραπάνω για τα *απλά* πολύεδρα ισχύει το θεώρημα Descartes. Καθώς έχουμε αναφέρει ότι μπορούμε να μετατρέψουμε τα *απλά* πολύεδρα σε σφαίρες τότε το θεώρημα Descartes θα ισχύει και για τα καμπυλωτά πολύγωνα της σφαίρας. Άρα για κάθε διαίρεση της σφαίρας σε καμπυλωτά πολύγωνα ισχύει η σχέση $n_v - n_e + n_f = 2$. Συνεπώς, για κάθε διαίρεση της σφαίρας σε κυρτά πολύγωνα ο αριθμός 2 θα εμφανίζεται ανεξάρτητα από το είδος των κυρτών πολυγώνων που σχηματίζονται στην σφαίρα. Θα λέμε ότι η σφαίρα έχει χαρακτηριστική 2.

Ας θεωρήσουμε τον τόρο, θα αποδείξουμε ότι η χαρακτηριστική του είναι 0. Όπως έχουμε αναφέρει στην Ενότητα 2.2 ο τόρος κατασκευάζεται από ένα επίπεδο (Σχήμα 11).



Σχήμα 11

Προκειμένου να διαιρέσουμε τον τόρο σε καμπυλωτά πολύγωνα διαιρούμε το επίπεδο (Σχήμα 12).



Σχήμα 12

Στην συνέχεια κατασκευάζουμε τον τόρο με την γνωστή μέθοδο. Το αποτέλεσμα είναι ο τόρος να έχει διαιρεθεί σε καμπυλωτά πολύγωνα. Λόγω του ότι οι κορυφές O ενώνονται σε μία και αντίστοιχα κάθε κορυφή με το ίδιο γράμμα γίνεται μία, γι' αυτή την διαίρεση παρατηρούμε ότι έχουμε

$$n_v = 9, n_e = 18, n_f = 9,$$

τότε

$$n_v - n_e + n_f = 0.$$

Οπότε για τον τόρο δεν ισχυέι το θεώρημα Descartes. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να δείξουμε ότι αν διαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό καμπυλωτών πολυγώνων με τρόπο ώστε για κάθε καμπυλωτή ακμή να υπάρχουν μόνο δύο καμπυλωτά πολύγωνα που να έχουν αυτην την ακμή κοινή, τότε η χαρακτηριστική του τορού είναι 0.

Γενικότερα, μπορούμε να βρούμε την χαρακτηριστική για κάθε επιφάνεια. Όπως θα δούμε η χαρακτηριστική είναι τοπολογική αμετάβλητη δηλαδή δύο ομοιομορφικές επιφάνειες έχουν την ίδια χαρακτηριστική. Άρα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μη-*απλό* πολύεδρο (Σχήμα 2) το οποίο είναι ομοιομορφικό με τον τόρο έχουν την ίδια χαρακτηριστική η οποία είναι 0.

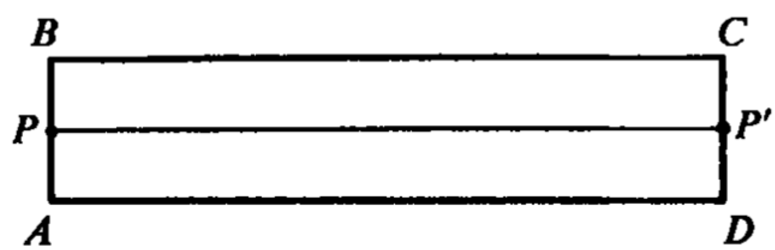
3.4 Μονομερείς επιφάνειες

Ας φανταστούμε ότι βρισκόμαστε στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Έστω ότι θέλουμε να μεταβούμε από ένα σημείο Α το οποίο βρίσκεται στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας, σε ένα σημείο Β το οποίο βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά της σφαίρας, με την προυπόθεση να μην τρυπήσουμε την επιφάνεια. Είναι προφανές ότι με την παραπάνω προυπόθεση που δώσαμε δεν θα μπορούσαμε να περάσουμε από την εξωτερική επιφάνεια στην εσωτερική.

Τις επιφάνειες που έχουν αυτήν την ιδιότητα τις ονομάζουμε *διμερής*.

Παρ' όλα αυτά υπάρχουν επιφάνειες που δεν ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ταινία Möbius η οποία κατασκευάζεται ως εξής:

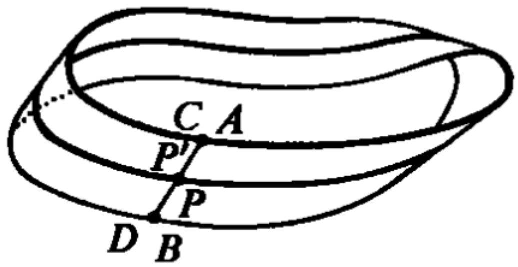
Αρχικά έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABCD$ όπως στο Σχήμα 13.



Σχήμα 13

Επιλέγουμε την πλευρά CD. Αφού την περιστρέψουμε 180^o από την αρχική της θέση, την κολλάμε με την πλευρά AB με τέτοιο τρόπο ώστε τα άκρα A, C και B, D να ταυτίζονται.

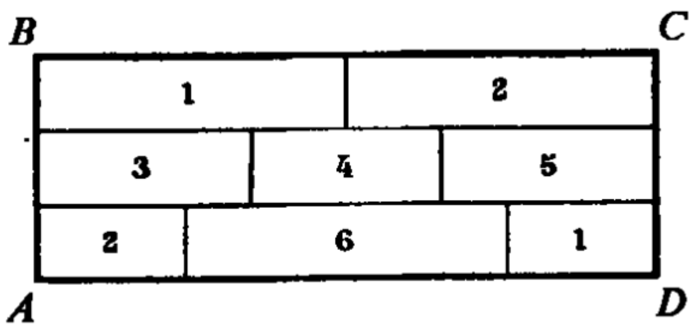
Τότε έχουμε το αποτέλεσμα της ταινίας Möbius (Σχήμα 14).



Σχήμα 14

Αφού έχουμε κατανοήση την επιφάνεια της ταινίας Möbius μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν βρισκόμασταν σε ένα σημείο πάνω στην επιφάνειά της και κάναμε μία διαδρομή P, P' όπως στο Σχήμα, τότε θα παρατηρούσαμε ότι αν το σημείο P βρισκόταν στο εσωτερικό της θα καταλήγαμε στο σημείο P' στην εξωτερική επιφάνεια της ταινίας Möbius χωρίς να την τρυπήσουμε. Δηλαδή η ταινία Möbius δεν έχει εσωτερικά και εξωτερικά μέρη. Τέτοιου τύπου επιφάνειες τις ονομάζουμε *μονομερής*.

Ο H. Tietze απέδειξε ότι ο χρωματικός αριθμός για την ταινία Möbius είναι 6. Για να το αποδείξουμε αυτό, αρχικά διαιρούμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABCD$ σε τρεις οριζόντιες λωρίδες. Στην συνέχεια την πρώτη λωρίδα την χωρίζουμε κάθετα σε δύο περιοχές τις 1 και 2, την δεύτερη σε τρεις τις 3,4,5 όπου η 4η περιοχή γειτονεύει με τις 1,2 και την τρίτη σε τρεις περιοχές τις 2,6,1 όπου η περιοχή 6 γειτονεύει με τις 3,4,5 (Σχήμα 15).

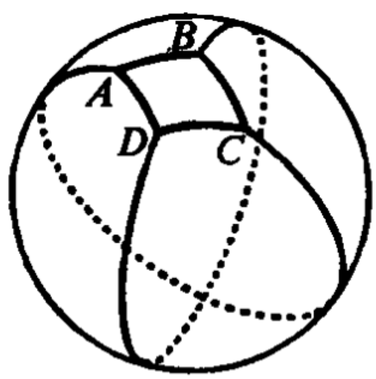


Σχήμα 15

Έπειτα δημιουργούμε την ταινία Möbius όπως έχουμε περιγράψει. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι περιοχές 1 και 2 που ήταν πάνω στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο όταν δημιουργηθεί η ταινία Möbius συνορεύουν. Οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε 6 περιοχές αντί για 8 που είχε το επίπεδο. Άρα ο μέγιστος αριθμός γειτονικών περιοχών είναι 6. Τότε και ο αριθμός των μέγιστων σημείων που μπορούμε να ενώσουμε μεταξύ τους ώστε οι διαδρομές τους να μην τέμνονται είναι 6.

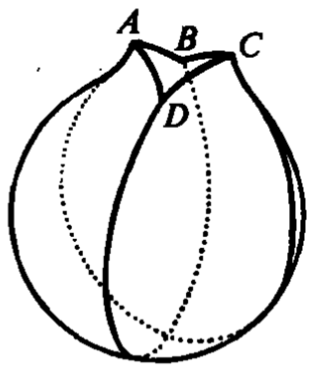
Η ταινία Möbius δεν είναι κλειστή επιφάνεια. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μπορούμε να βρούμε μια κλειστή μονομερής επιφάνεια στον χώρο. Μια τέτοια επιφάνεια θα πρέπει να μην έχει ακμές και να μην έχει εσωτερικό και εξωτερικό. Παρ' όλα αυτά πρέπει να τρυπάει τον εαυτό της σε συγκεκριμένα μέρη. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το εξής:

Ας πάρουμε την επιφάνεια της σφαίρας κατασκευασμένη από ένα ελαστικό υλικό. Σχεδιάζουμε ένα τετράπλευρο $ABCD$ πάνω στην σφαίρα και το αφαιρούμε (Σχήμα 16).



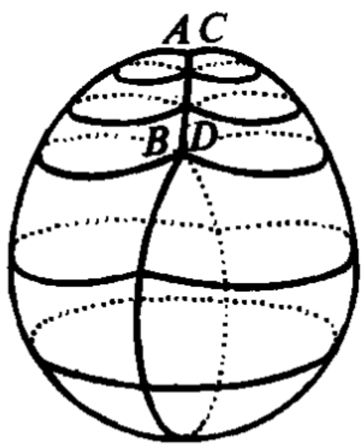
Σχήμα 16

Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε την επιφάνεια της σφαίρας όπως στο Σχήμα 17.



Σχήμα 17

Κλείνουμε το άνοιγμα ενώνοντας την πλευρά AB με την πλευρά CD και την πλευρά DA πλευρά BC. Τελικά παίρνουμε το αποτέλεσμα του Σχήματος 18.

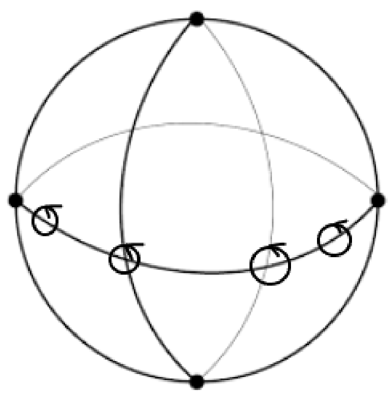


Σχήμα 18

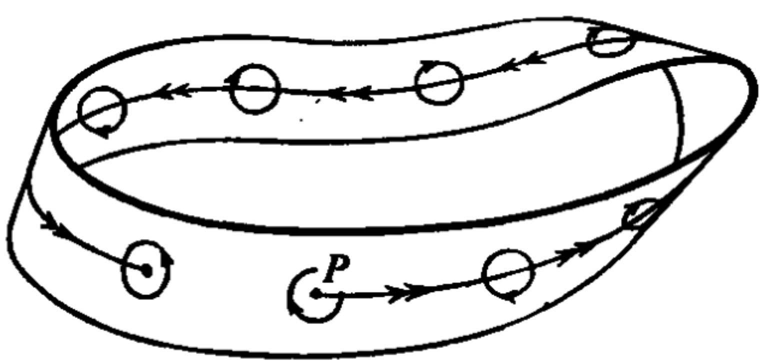
Αυτή είναι μία κλειστή επιφάνεια η οποία έχει μία καμπύλη διείσδυσης AB. Αρα αυτή είναι μια μονομερής και κλειστή επιφάνεια.

3.5 Προσανατολίσιμες και μη-προσανατολίσιμες επιφάνειες

Οι μονομερείς επιφάνειες στον χώρο μπορούν να χαρακτηριστούν και από μια άλλη τοπολογική ιδιότητα. Ας θεωρήσουμε μία τυχαία επιφάνεια στον χώρο και για κάθε σημείο πάνω της μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κύκλο με κέντρο αυτό το σημείο, με εξαίρεση τα σημεία του συνόρου. Στην συνέχεια σ' αυτούς του κύκλους προσδίδουμε μία έννοια κυκλικής κατεύθυνσης ώστε για κάθε δύο γειτονικά σημεία η αντίστοιχοι κύκλοι με κέντρα αυτά να έχουν την ίδια κατεύθυνση. Εάν αυτό ισχύει για κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια τότε η επιφάνεια ονομάζεται *προσανατολίσιμη* (Σχήμα 19), διαφορετικά θα την ονομάζουμε *μη-προσανατολίσιμη* (Σχήμα 20). Άρα μια μονομερής επιφάνεια δεν μπορεί να είναι προσανατολίσιμη. Σε κάθε μονομερής επιφάνεια υπάρχει τουλάχιστον μία κλειστή διαδρομή κατά μήκος της οποίας μπορούμε να «περπατήσουμε» και να βρεθούμε σε ένα άλλο σημείο το οποίο είναι στην άλλη μερία της επιφάνειας.



Σχήμα 19

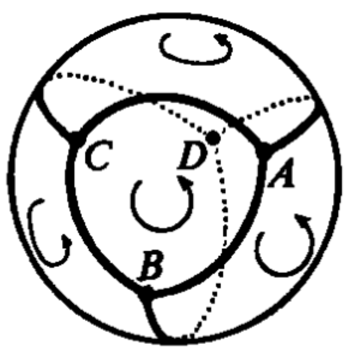


Σχήμα 20

Άρα εάν επιλέξουμε ένα σημείο της επιφάνειας και κατασκευάσουμε κύκλο με κέντρο το σημείο αυτό προσδιδοντάς του μια συγκεκριμένη κατεύθυνση τότε εάν διασχίσει την παραπάνω διαδρομή θα καταλήξουμε να έχουμε ένα σημείο γειτονικό με το αρχικό μας το οποίο όμως έχει διαφορετική κυκλική κατεύθυνση (Σχήμα 20). Αυτό είναι χαρακτηριστικό των μονομερών επιφανειών.

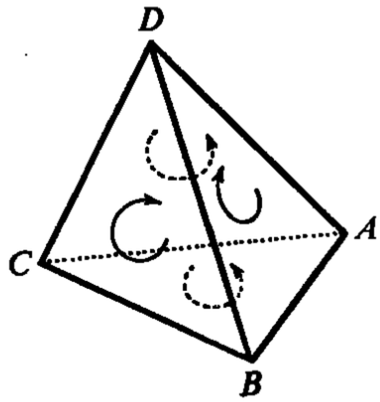
Εάν την ταινία Möbius την κόψουμε κατά μήκος της καμπύλης όπως στο Σχήμα 20 δεν θα χωριστεί σε δύο κομμάτια όπως θα περιμέναμε. Η κλειστή καμπύλη P, P' διαθέτει την εξής σημαντική ιδιότητα: αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο σε ένα από τα δύο κομμάτια της ταινίας Möbius και το διατρέξουμε στην επιφάνειά της παρατηρούμε ότι θα διαπεράσει και το άλλο κομμάτι της ταινίας και τελικά θα βρίσκεται στην συμμετρική μεριά της ταινίας απ' ότι ξεκίνησε. Μια κλειστή καμπύλη πάνω σε μια επιφάνεια έχει αυτήν την ιδιότητα αν και μόνο αν είναι μονομερής επιφάνεια. Με βάση το γεγονός αυτό κάθε διμερής επιφάνεια είναι προσανατολίσιμη.

Ας θεωρήσουμε μία επιφάνεια την οποία μπορούμε να διαιρέσουμε σε καμπυλοτά πολύγωνα. Τότε ο προσανατολισμός πάνω σ' αυτήν την επιφάνεια μπορεί να οριστεί με έναν διαφορετικό τρόπο. Για ένα καμπυλωτό πολύγωνο CBA πάνω σ' αυτήν την επιφάνεια μπορεί να οριστεί προσανατολισμός με βάση την παράθεση των κορυφών που εκφράζουν την διεύθυνση (Σχήμα 21).



Σχήμα 21

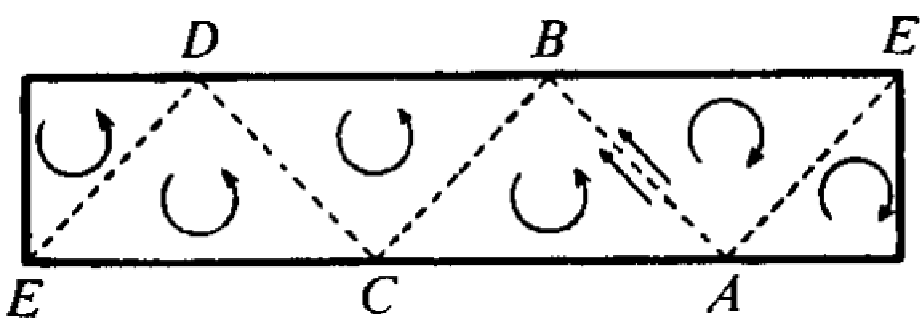
Σύμφωνα με τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε ότι εάν έχουμε μια πλευρά η οποία είναι κοινή σε δύο πολύγωνα και επίσης έχουμε ορίσει μία έννοια προσανατολισμού πάνω σε αυτά τότε παρατηρούμε ότι η πλευρά αυτή έχει αντίθετες κατευθύνσεις. Για παράδειγμα παρατηρήστε το παρακάτω Σχήμα 22 .



Σχήμα 22

Τα πολύγωνα BCD και ABD αναφέρονται σύμφωνα με τον τρόπο που έχουν προσανατολιστεί, παρατηρούμε ότι αυτά τα δύο πολύγωνα έχουν κοινή πλευρά την DB παρόλα αυτά αν προσπαθήσουμε να διαβάσουμε την πλευρά σύμφωνα με τον προσανατολισμό του BCD πολυγώνου θα τη διαβάζαμε DB ενώ με του ABD θα τη διαβάζαμε ως BD. Άρα κάθε πλευρά κυρτόυ πολυγώνου που βρίσκεται πάνω σε μία διαιρεμένη από αυτά κλειστή επιφάνεια έχει δύο κατευθύνσεις, σε αυτή την περίπτωση η επιφάνεια αυτή ονομάζεται προσανατολίσιμη. Αυτός είναι ο *κανόνας του Möbius* για τις πλευρές.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε με τον κανόνας του Möbius ότι η ταινία Möbius είναι μη-προσανατολίσιμη όπως έχει αποδειχθεί και παραπάνω. Ας την διαιρέσουμε σε πέντε τρίγωνα (Σχήμα 23)

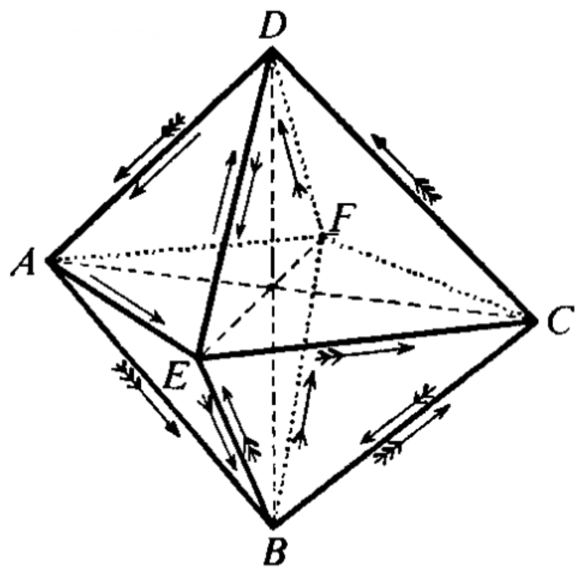


Σχήμα 23

και δίνουμε την έννοια του προσανατολισμού σε ένα από τα πέντε τρίγωνα, για παράδειγμα ABC. Τότε παρατηρούμε ότι η κατεύθυνση για το τρίγωνο

ABE είναι η ABE. Παρ' όλα αυτά η πλευρά AB για το τρίγωνο ABC έχει την κατεύθυνση AB το ίδιο ισχύει και για το τρίγωνο ABE. Άρα έχουμε βρει μία πλευρά από την πολυγωνική μας διαίρεση η οποία έχει δύο ίδιες κατευθύνσεις. Οπότε σύμφωνα με τον κανόνα του Möbius η επιφάνεια είναι μη-προσανατολίσιμη.

Θα δώσουμε ένα ακόμα παράδειγμα μη-προσανατολίσιμης επιφάνειας. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε το οκτάεδρο $ABCDEF$ (Σχήμα 24), το σχήμα που δημιουργείται από τις τέσσερις έδρες AED, EBC, CFD, ABF και τρία τετράγωνα $ABCD, EBFD, AECF$.



Σχήμα 24

Άρα τελικά έχουμε επτά πολύγωνα. Επίσης οι διαγώνιοι AC, BD, EF δεν θεωρούνται ως πλευρές. Κάθε πλευρά του σχήματος είναι κοινή με δύο πολύγωνα. Οι τέσσερις έδρες $AED, EBFD, EBC, ABCD$ έχουν ανά δύο μία κοινή πλεύρα. Έστω ότι ορίζουμε ένα προσανατολισμό στην έδρα AED ως AED. Από τον κανόνα Möbius μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι υπόλοιπες έδρες έχουν τους εξής προσανατολισμούς $DEBF, BEC, BCDA$. Άρα μπορούμε να διακρίνουμε ότι η πλευρά AD έχει δύο ίδιες κατευθύνσεις. Συνεπώς, το παραπάνω επτάεδρο δεν είναι προσανατολίσιμη επιφάνεια. Αυτό λέγεται επτάεδρο C. Reinhardt.

Το επτάεδρο C. Reinhardt δεν είναι simple πολύεδρο καθώς από το θεώρημα Descartes έχουμε

$$n_v - n_e + n_f = 6 - 12 + 7 = 1$$

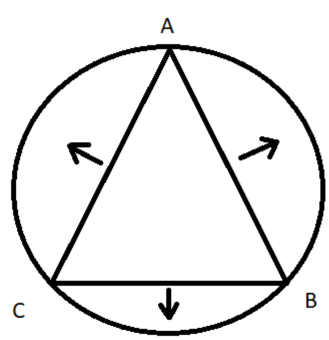
το οποίο δεν ισχύει για τα *απλά* πολύεδρα. Οπότε δεν μπορούμε με συνεχή τρόπο να μετατρέψουμε αυτό το επτάεδρο σε σφαίρα.

3.6 Τοπολογικά πολύγωνα

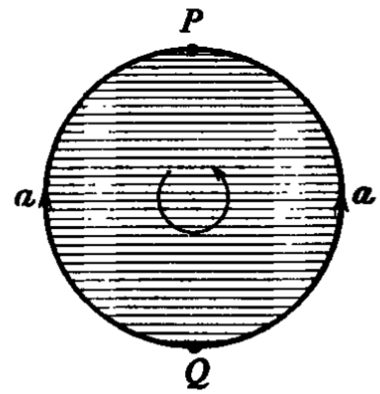
Κάθε πολύγωνο είναι ομοιομορφικό με τον κυκλικό δίσκο. Θα λέμε ότι ένας κυκλικός δίσκος είναι *τοπολογικό πολύγωνο* αν η περιφέρειά του μπορεί να διαιρεθεί σε έναν συγκεκριμένο αριθμό $r \geq 2$ τόξων τα οποία ονομάζονται πλευρές, με κορυφές ίσες με τον αριθμό των πλευρών. Όποτε τα τοπολογικά πολύγωνα καθορίζονται από ένα κυκλικό δίσκο και τον αριθμό των πλευρών.

Όταν $r > 2$, ένα τοπολογικό πολύγωνο είναι πάντα ομοιομορφικό με ένα κυρτό ευθύγραμμο πολύγωνο (Σχήμα 25).

Είναι προφανές ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο πολύγωνο με δύο πλευρές. Παρ'ολα αυτά, στο Σχήμα 26 φαίνεται ένα τοπολογικό πολύγωνο με δύο πλευρές. Συμφωνά με τον ορισμό των τοπολογικών πολυγώνων τα ευθύγραμμα πολύγωνα είναι ειδικές περιπτώσεις τοπολογικών πολυγώνων. Από εδώ και πέρα, όταν αναφερόμαστε σε πολύγωνα θα εννοούμε πάντα τοπολογικά πολύγωνα, εκτός αν αναφέρεται το αντίθετο.



Σχήμα 25

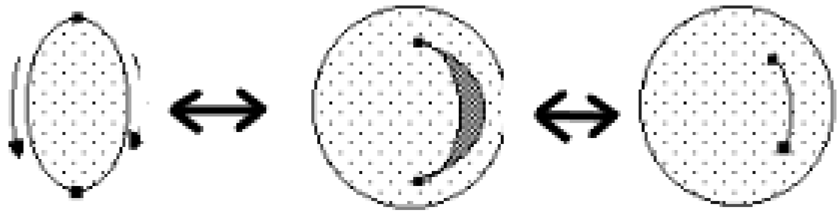


Σχήμα 26

3.7 Κατασκευή κλειστών προσανατολίσιμων επιφανειών από πολύγωνα

Σε αυτήν την ενότητα θα κατασκευάσουμε κλειστές επιφάνειες μετασχηματίζοντας πολύγωνα και κολλώντας συγκεκριμένες πλευρές μεταξύ τους. Αυτή η πράξη δεν είναι ομοιομορφισμός καθώς δύο διαφορετικά σημεία μπορούν να ταυτίζονται μετά την επικόλληση των πλευρών. Αλλά η διαδικασία αυτή θα μας διευκρινίζει πως κάποιες συγκεκριμένες επιφάνειες μπορούμε να τις αποσυνδέσουμε σε ένα ή περισσότερα πολύγωνα ικανοποιώντας κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες.

Αρχικά, θεωρούμε μία σφαιρική επιφάνεια κατασκευασμένη από ένα ελαστικό υλικό. Κόβουμε την επιφάνεια κατά μήκος ενός τόξου P, Q. Έπειτα, μετασχηματίζοντας κατάλληλα την επιφάνεια είναι φανερό ότι μπορούμε να την μετατρέψουμε σε ένα δίσκο με δύο τόξα όπως στο Σχήμα 26. Τελικά, παρατηρούμε ότι την σφαίρα την μετατρέψαμε σε ένα τοπολογικό πολύγωνο με δύο πλευρές. Αντίστοιχα, μπορούμε να μετατρέψουμε ένα τοπολογικό πολύγωνο με δύο πλευρές σε μία σφαίρα απλά κολλώντας τις δύο πλευρές του. Με άλλα λόγια, την σφαίρα μπορούμε να την δημιουργήσουμε από ένα πολύγωνο με δύο πλευρές μετασχηματίζοντας κατάλληλα την επιφάνεια του πολυγώνου και κολλώντας τις δύο πλευρές με τέτοιο τρόπο ώστε να συμπίπτουν οι κατευθύνσεις που έχουμε ορίσει πάνω τους (Σχήμα 27).

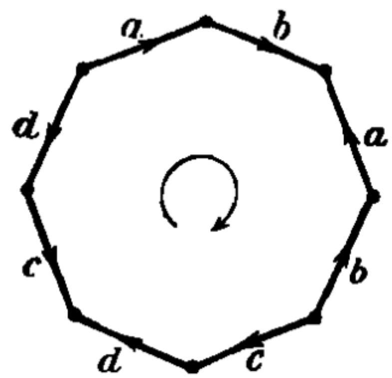


Σχήμα 27

Αν ορίσουμε μία κυκλική κατεύθυνση στο εσωτερικό του τοπολογικού πολυγώνου τότε μπορούμε να ορίσουμε τις πλευρές του PQ, QP ως a^-, a^+ αντίστοιχα (Σχήμα 26).

Για παράδειγμα, ο τόρος κατασκευάζεται από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (σελ.18 Σχήμα 5) κολλώντας τις πλευρές με το ίδιο όνομα. Παρ'όλα αυτά, υπάρχει και ένας δεύτερος τρόπος να ενώσουμε τις πλευρές αυτού του ορθογώνιου παραλληλογράμμου, ενώνοντας τις πλευρές a αφού πρώτα περιστρέψουμε 180^o την μία από τις δύο. Ως αποτέλεσμα θα έχουμε την ταινία Möbius. Όμως μας ενδιαφέρει από ένα πολύγωνο να έχουμε μοναδική επιφάνεια. Οπότε στο εσωτερικό του πολυγώνου θα ορίζουμε μία κυκλική κατεύθυνση και θα δίνουμε κατευθύνσεις στις πλευρές του πολυγώνου ώστε να ενώνουμε κατάλληλα τις αντίθετες κατευθύνσεις.

Ας θεωρήσουμε το πολύγωνο με οχτώ πλευρές όπως φαίνεται στο Σχήμα 28.

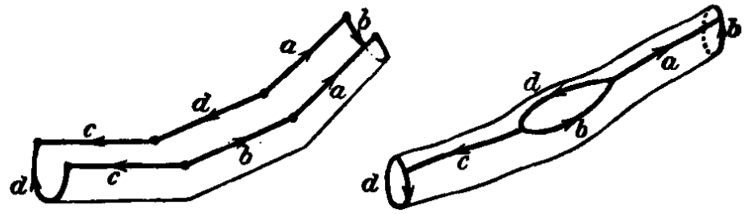


Σχήμα 28

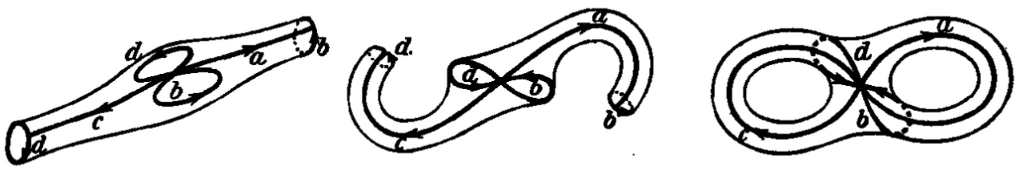
Παρατηρούμε ότι η κατεύθυνση πάνω στην περιφέρεια και στο εσωτερικό έχει ορισθεί. Στόχος μας είναι να κολλήσουμε τις πλευρές με την ίδια ονομασία όπου τα βελάκια μοιάζουν. Το Σχήμα 28 με βάση την εσωτερική κυκλική κατεύθυνση όπως έχει ορισθεί, μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

$$a^+b^+a^-b^-c^+d^+c^-d^-.$$

Άρα τις πλευρές τις οποίες θα κολλήσουμε είναι η εξής: $a^+ \leftrightarrow a^-$, $b^+ \leftrightarrow b^-$, $c^+ \leftrightarrow c^-$, $d^+ \leftrightarrow d^-$. Το αποτέλεσμα αυτών των πράξεων σχηματικά απεικονίζεται ως:



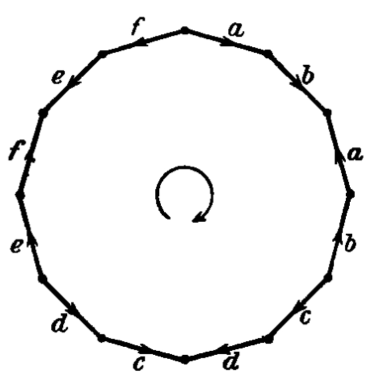
Σχήμα 29



Σχήμα 30

Το αποτέλεσμα τις παραπάνω διαδικασίας ονομάζεται *γενικευμένος τόρος με δύο οπές.*

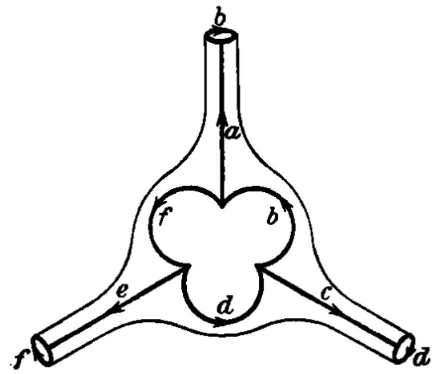
Ένα άλλο παράδειγμα είναι το εξής πολύγωνο:



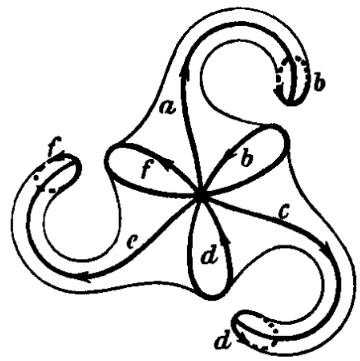
Σχήμα 31

Συμβολικά αναπαριστάται ως: $a^+b^+a^-b^-c^+d^+c^-d^-e^+f^+e^-f^-$

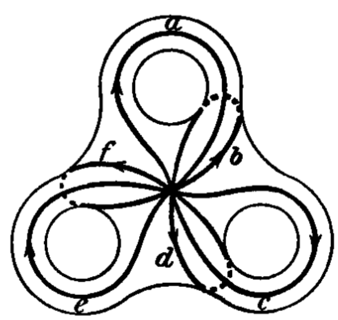
Το παραπάνω πολύγωνο με δώδεκα πλευρές θα δείξουμε ότι μετατρέπεται σε έναν τόρο με τρεις οπές. Ακολουθώντας την διαδικασία του προηγούμενου σχήματος έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.



Σχήμα 32



Σχήμα 33



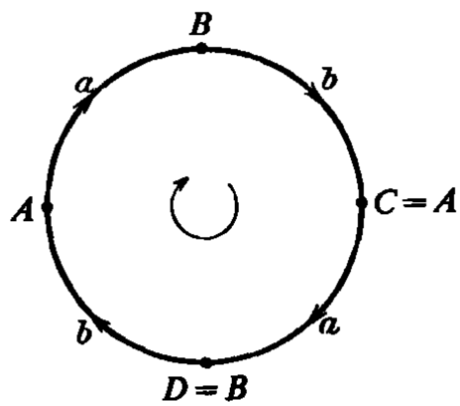
Σχήμα 34

Γενικεύοντας τα παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν γενικευμένο τόρο με p οπές, ξεκινώντας με ένα πολύγωνο με $4p$ πλευρές.

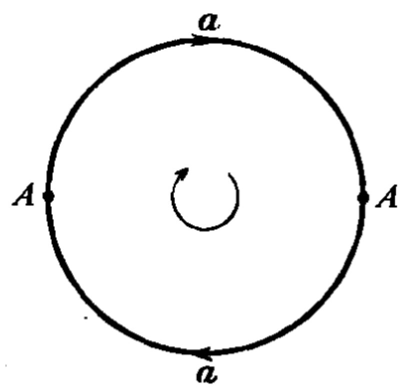
3.8 Κατασκευή κλειστών μη-προσανατολίσιμων επιφανειών από πολύγωνα

Το Σχήμα 18 (σελ.44) κατασκευάστηκε μετασχηματίζοντας και κολλώντας κατάλληλα τις τέσσερις πλευρές ενός πολυγώνου στην επιφάνεια της σφαίρας. Άρα το Σχήμα 18 είναι αποτέλεσμα του τοπολογικού πολυγώνου με πλευρές a^+, b^+, a^+, b^+ (Σχήμα 35). Αυτές τις πλευρές μπορούμε να τις απλοποιήσουμε συμβολίζοντας το $b = a$ (Σχήμα 36).

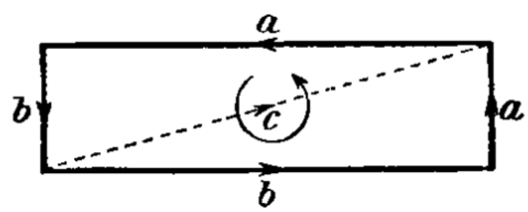
Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πολύγωνο a^+, a^+, b^+, b^+. Κόβουμε αυτό το πολύγωνο κατά μήκος της διαγωνίου c σχηματίζοντας δύο τρίγωνα (Σχήμα 37) και κολλάμε τα τρίγωνα κατά μήκος των πλευρών b.



Σχήμα 35

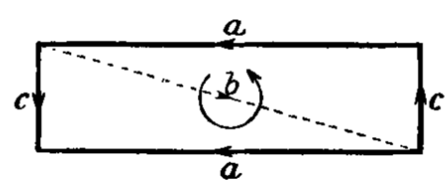


Σχήμα 36

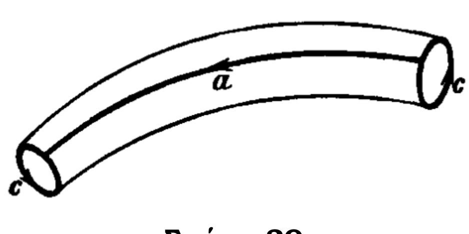


Σχήμα 37

Μετασχηματίζοντας κατάλληλα το αποτέλεσμα μπορούμε να έχουμε ένα πολύγωνο με τέσσερις πλευρές a^+, c^+, a^-, c^+ (Σχήμα 38). Στη συνέχεια κολλάμε τις πλευρές a ώστε να δημιουργήσουμε έναν κύλινδρο με αρχή και τέλος τις πλευρές c (Σχήμα 39). Όμως, παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να μετασχηματίσουμε κατάλληλα το σχήμα ώστε τα βέλη των πλευρών c να ταιριάζουν.

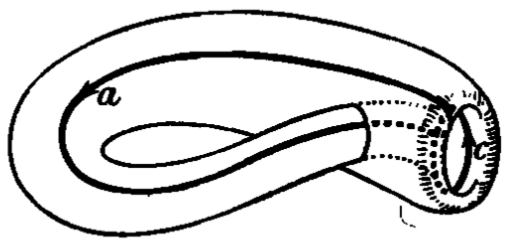


Σχήμα 38



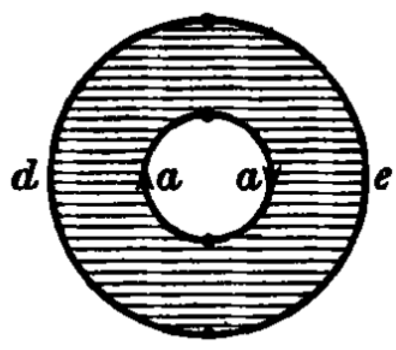
Σχήμα 39

Για να μπορέσουμε να ενώσουμε τις δύο πλευρές, αρχικά, μετασχηματίζουμε την μία από τις δύο ώστε να είναι μικρότερη από την άλλη. Στην συνέχεια παίρνουμε την μικρότερη πλευρά και την διαπερνάμε από το τοίχωμα της επιφάνειάς της και την ενώνουμε με την άλλη πλευρά c (Σχήμα 40). Αυτή η επιφάνεια ονομάζεται *επιφάνεια του Klein* και μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι είναι μία κλειστή μη-προσανατολίσιμη επιφάνεια.

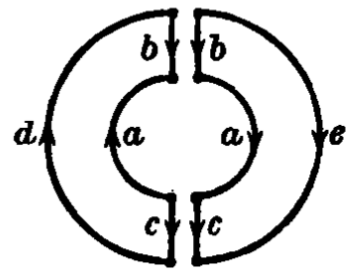


Σχήμα 40

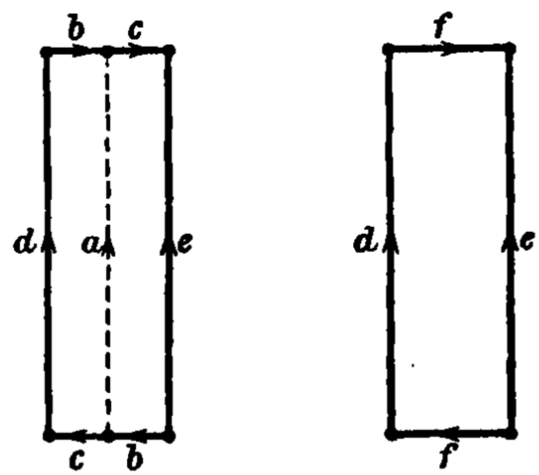
Ας θεωρήσουμε ένα κυκλικό δακτυλίδι (Σχήμα 41). Αφού το κόψουμε στην μέση (Σχήμα 42) μετασχηματίζουμε αυτά τα δύο κομμάτια που έχουν προκύψει όπως στο (Σχήμα 43,I). Τέλος, κολλάμε αυτά τα δύο κατά μήκος των κοινών πλευρών a (Σχήμα 43,II). Περιστρέφοντας 180^o την πλευρά f την κολλάμε με την όμοια πλευρά της, δημιουργώντας την ταινία Möbius. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι η μία από τις δύο πλευρές (δηλαδή η a) του κυκλικού δακτυλιδιού έχει μετασχηματιστεί στην μεσαία καμπύλη της ταινίας Möbius, ενώ η εξωτερική πλευρά έχει μετατραπεί στην πλευρά της ταινίας.



Σχήμα 41



Σχήμα 42



Σχήμα 43

Καταλήγοντας, μπορούμε να δημιουργήσουμε την ταινία Möbius από ένα τοπολογικό πολύγωνο με μία οπή. Επίσης, μπορούμε να δημιουργήσουμε την επιφάνεια του Klein κολλώντας δύο ταινίες Möbius ακμή με ακμή. Καθώς και από την επιφάνεια του Klein κόβοντάς την όπως το παρακάτω σχήμα προκύπτουν δύο ταινίες Möbius.

3.9 Τοπολογικός ορισμός κλειστών επιφανειών

Στις προηγούμενες ενότητες αναφέραμε την έννοια της επιφάνειας, χωρίς βέβαια να έχουμε δώσει αυστηρό τοπολογικό ορισμό αλλά στηριζόμασταν στις γνώσεις της στοιχειώδης γεωμετρίας. Παρακάτω θα δώσουμε τον τοπολογικό ορισμό της επιφάνειας. Προς διευκόλυνσή μας θα περιοριστούμε στις κλειστές επιφάνειες.

Στις δύο προηγούμενες ενότητες κατασκευάσαμε μερικές κλειστές επιφάνειες χρησιμοποιώντας πολύγωνα και οριζοντας μία κατεύθυνση σε αυτά. Αντίστροφα, μπορούμε να κατασκευάσουμε πολύγωνα αποσυντίθοντας τις επιφάνειες σε ένα ή περισσότερα πολύγωνα υπό κάποια συγκεκριμένα κριτήρια. Αυτές οι επιφάνειες ποικίλουν εξετάζοντάς τες από την μετρική τους μορφή, για τον λόγο αυτό θα περιοριστούμε σε επιφάνειες τις οποίες μπορούμε να τις μετατρέψουμε σε ένα ή περισσότερα πολύγωνα υπο κάποιες συνθήκες όπως αναφέραμε οι οποίες θα διασαφηνιστούν παρακάτω. Είναι φυσικό αυτές τις συνθήκες να τις επιλέξουμε ώστε να γενικεύουν τις συνθήκες για τα πολύεδρα (σελ. 30 Ορισμός 3.1). Για τον λόγο αυτό θα ονομάζουμε αυτές τις επιφάνειες *κλειστές πολυεδρικές επιφάνειες*.

Ορισμός 3.7 (Τοπολογικό πολύεδρο)**.** Ένα *τοπολογικό πολύεδρο* είναι ένα σύστημα πεπερασμένου αριθμού τοπολογικών πολυγώνων τα οποία ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. Κάθε δύο πολύγωνα του συστήματος να μην έχουν κοινό εσωτερικό σημείο.

2. Κάθε δύο διαδοχικά πολύγωνα έχουν κοινή πλευρά.

3. Τα πολύγωνα του συστήματος δεν μπορούν να χωριστούν σε δύο ξεχωριστά συστήματα τέτοια ώστε κάθε πλευρά του πολυγώνου των συστημάτων να είναι κοινή με άλλη πλευρά του ίδιου συστήματος(Για παράδειγμα φανταστείται τα πλακάκια του δαπέδου ως ένα σύστημα πολυγώνων, αν το δαπεδο το χωρίσουμε στην μέση τότε τα πλακάκια στο σύνορο χωρισμού έχουν μία πλευρά η οποία δεν είναι κοινή με άλλο πολύγωνο του ίδιου συστήματος).

4. Για κάθε κορυφή ενός πολυγώνου του συστήματος, τα πολύγωνα που έχουν αυτή την κορυφή κοινή μπορούν να αναπαρασταθούν σε κυκλική μορφή ως εξής: $p_1, p_2, ..., p_n$ ώστε τα p_i και p_{i+1} να έχουν κοινή πλευρά που περνά από αυτήν την κορυφή.

Τα πολύγωνα τα οποία δημιουργούν ένα πολύεδρο ονομάζονται *έδρες*. Μία κοινή πλευρά δύο πολυγώνων ονομάζεται *ακμή* του πολυέδρου. Ένα σημείο του πολυέδρου ονομάζεται *κορυφή* εάν είναι κορυφή για κάποιο πολύγωνο που δημιουργεί το πολύεδρο.

Ορισμός 3.8 (Κλειστή επιφάνεια)**.** *Κλειστή επιφάνεια* ορίζουμε να είναι το σύνολο των σημείων που ανήκουν σε ένα τοπολογικό πολύεδρο.

Όπως η έννοια των τοπολογικών πολυγώνων έτσι και η έννοια των τοπολογικών πολυέδρων είναι αμετάβλητη κάτω από τους ομοιομορφισμούς. Άρα κάθε σύνολο ομοιομορφικό με μία κλειστή επιφάνεια είναι και αυτό κλειστή επιφάνεια. Οπότε, η ιδιότητα των συνόλων να είναι κλειστές επιφάνειες είναι τοπολογικά αμετάβλητη.

Μία κλειστή επιφάνεια θα μπορούσαμε να την χωρίσουμε σε πολύγωνα με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, σεβόμενοι βέβαια τις τέσσερις παραπάνω συνθήκες. Μια τέτοια διαδικασία σε μία κλειστή επιφάνεια ονομάζεται *πολυγωνική διαίρεση*. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι εφαρμόζοντας κατάλληλες πολυγωνικές διαιρέσεις σε μία κλειστή επιφάνεια θα έχουμε και διαφορετικό πολύεδρο. Για παράδειγμα, την σφαίρα μπορούμε να την μετατρέψουμε σε καμπυλόγραμμο κύβο ή σε καμπυλόγραμμο τετράεδρο ή σε καμπυλόγραμμο οχτάεδρο κ.τ.λ.. Λόγω του ότι από μία επιφάνεια μπορούμε να έχουμε πολλά διαφορετικά πολύεδρα είναι αναγκαίο να ξεχωρίσουμε τις έννοιες της κλειστής επιφάνειας και του πολυέδρου. Μία κλειστή επιφάνεια είναι το σύνολο των σημείων τα οποία παράγονται από μία πολυγωνική διαίρεση. Ενώ ένα πολύεδρο είναι μια κλειστή επιφάνεια του οποίου η πολυγωνική διαίρεση είναι ήδη καθορισμένη. Συνεπώς, μία κλειστή επιφάνεια είναι ένα σύνολο σημείων, ενώ ένα πολύεδρο είναι ένα σύνολο πολυγώνων που σχετίζονται με κάποια συγκεκριμένη σχέση.

Βιβλιογραφία

[1] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας, Β.Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1997.

[2] Μ.Ανούσης, Α.Τσολομύτης, Β.Φελουζής, *Πραγματική Ανάλυση*, Σάμος 2014.

[3] M.Fréchet K.Fan, *Initiation to Combinatorial Topology*, 1967.

[4] T.Lawson, *Topology: A Geometric Approach*, Oxford University, Press 2003.

[5] Ulrich Pennig, *Quotient Spaces of the Unit Square*, Cardiff University, 2017, παρουσίαση σε διαφάνειες.

[6] Δ.Γεωργίου, Σ.Ηλιάδης, *Γενική Τοπολογία*, Εκδόσεις Τσιόλα, 2017.

[7] Hilbert, David, and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the Imagination*, tr. by P. Nemenyi. New York: Chelsea Publishing Company, 1952.