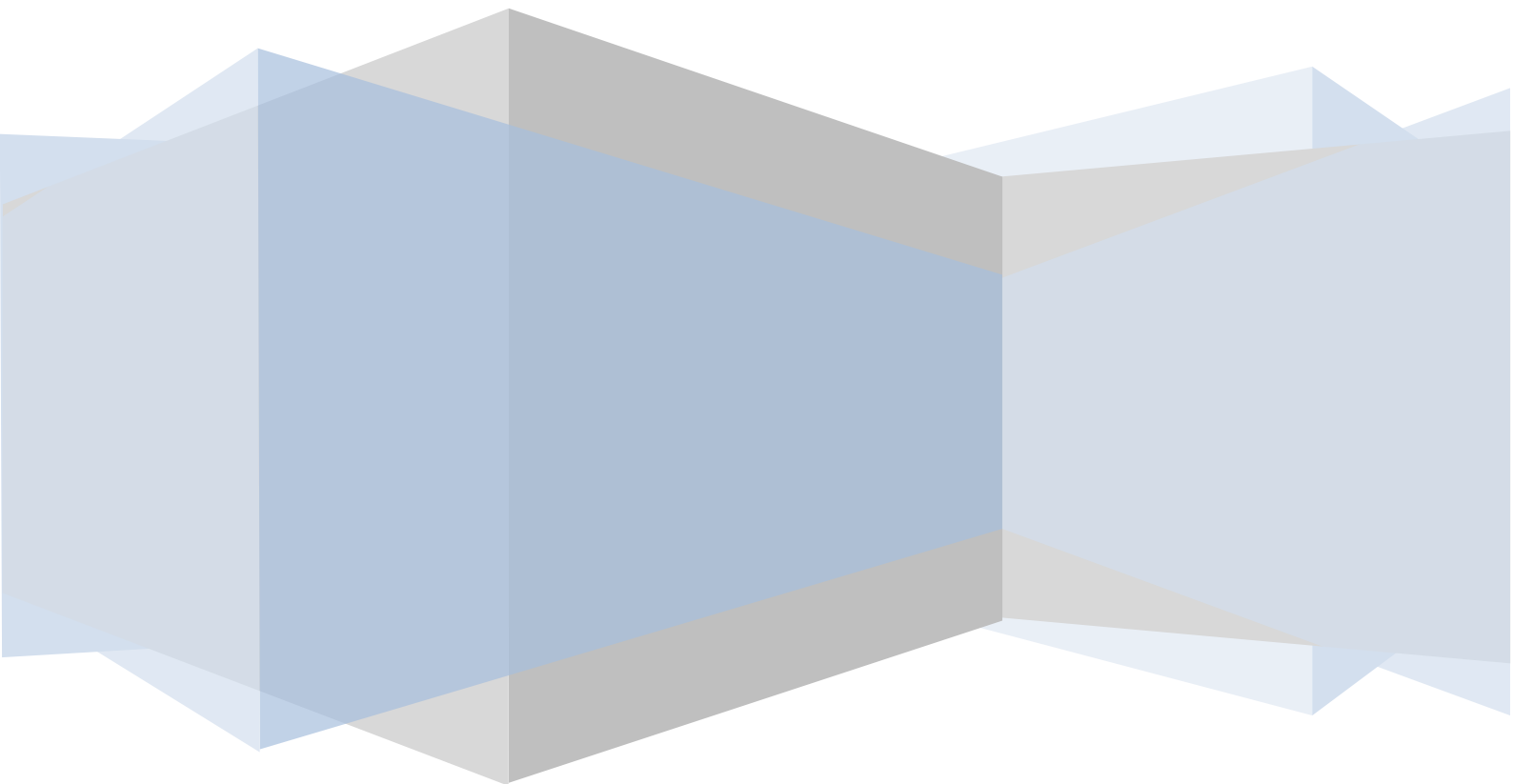


*Το φαινόμενο Bohm -Aharonov
και παραλλαγές του.*

*Διπλωματική εργασία του Κουρελά Γεώργιου
επιβλέπων καθηγητής Αγαπητός Χατζηνικήτας*



Στους γονείς μου και την Ευτυχία

Περιεχόμενα

| | |
|--|-----------|
| <i>Εισαγωγή</i> | <i>4</i> |
| <i>Προαπαιτούμενες γνώσεις.....</i> | <i>6</i> |
| <i>Το φαινόμενο Bohm-Aharonov στην Κλασική Μηχανική.....</i> | <i>16</i> |
| <i>Η κβαντική εξήγηση του φαινομένου Bohm-Aharonov.....</i> | <i>24</i> |
| <i>Ακριβής λύση για το πρόβλημα της σκέδασης.....</i> | <i>28</i> |
| <i>Ασυμπτωτική συμπεριφορά.....</i> | <i>34</i> |
| <i>Η σημασία των αποτελεσμάτων μας.....</i> | <i>37</i> |
| <i>Τα πρώτα πειράματα.....</i> | <i>51</i> |
| <i>Περιστρεφόμενοι υπεραγωγοί.....</i> | <i>61</i> |

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το φαινόμενο των Bohm-Aharonov

Το 1939 ο W.Franz [15] μελέτησε την αλληλεπίδραση του μαγνητικού πεδίου με τα ηλεκτρόνια. Δέκα χρόνια αργότερα, το 1949, οι W. Ehrenberg και R. E. Siday έγραψαν μια σημαντική εργασία [14] για την κίνηση των ηλεκτρονίων μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Το 1959 οι Y. Aharonov και D. Bohm δημοσίευσαν μια εργασία [3] με τίτλο: “Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory”, στην οποία μελετούσαν τη διαφορά φάσης που εμφανίζεται στα ηλεκτρόνια όταν αυτά κινούνται υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου (στο εξής θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία B-A φαινόμενο). Το 1960 ο R. G. Chambers [13] επαλήθευσε πειραματικά το φαινόμενο.

Είχε δημιουργηθεί μεγάλη σύγχυση όσον αφορά τη φύση του προβλήματος που κυρίως οφειλόταν στην παρανόηση κάποιων εννοιών της Κβαντομηχανικής. Αξίζει να επισημάνουμε τα εξής:

1) Στην περίπτωση του φαινομένου B-A μια μη-τοπική συνοριακή συνθήκη συσχετίζει τη μεταβολή της φάσης της κυματοσυνάρτησης, που περιγράφει την κίνηση ενός ηλεκτρονίου γύρω από ένα σωληνοειδές πηνίο, με το ποσό της μαγνητικής ροής Φ που διέρχεται από το σωληνοειδές. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται ανεξάρτητα από την πιθανότητα το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται κοντά ή μακριά από το σωληνοειδές.

2) Το φαινόμενο B-A δεν μπορεί να ανιχνευτεί για ένα μεμονωμένο ηλεκτρόνιο ή ακόμη και για μικρό πλήθος ηλεκτρονίων. Απαιτείται μεγάλο πλήθος ηλεκτρονίων ή άλλων φορτισμένων σωματιδίων. Η δύναμη Lorentz που εμφανίζεται ακόμη και σε ένα κινούμενο φορτισμένο σωματίδιο δεν συμμετέχει στο φαινόμενο.

Αυτές οι δύο παρατηρήσεις καταδεικνύουν την αναγκαιότητα να μελετήσουμε το φαινόμενο χρησιμοποιώντας την Κβαντομηχανική θεωρία. Η εργασία των Bohm-Aharonov βοήθησε στην κατανόηση του σημαντικού ρόλου που διαδραματίζουν τα ανυσματικά δυναμικά \vec{A} στην ερμηνεία κβαντομηχανικών φαινομένων που απαντώνται στη φύση. Ποιο συγκεκριμένα το B-A φαινόμενο, που είναι γενικά ένα μη-τοπικό* φαινόμενο, απαντά στο ερώτημα γιατί η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου επηρεάζεται από την διέλευσή του πλησίον μαγνητικού πεδίου που είναι εντοπισμένο σε συγκεκριμένη περιοχή του χώρου.

Παρακάτω παρουσιάζουμε περιληπτικά τα περιεχόμενα των κεφαλαίων αυτής της εργασίας

Στο Κεφάλαιο 1.2 γίνεται σύντομη ανασκόπηση των στοιχειωδών γνώσεων από μαθηματικής και φυσικής σκοπιάς που απαιτούνται έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει καλύτερη κατανόηση της εργασίας. Αρχικά παραθέτουμε βασικά στοιχεία του Ηλεκτρομαγνητισμού, όπως ο νόμος του Gauss, η δύναμη Lorentz, ο νομός των Biot-Savart, ο νόμος του Ampère, και οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό. Στην συνέχεια κάνουμε αναφορά σε βασικά στοιχεία της Κλασικής Μηχανικής όπως: οι εξισώσεις των Euler-Lagrange, η συνάρτηση του Hamilton, οι εξισώσεις του Hamilton και η συνάρτηση του Hamilton για συντηρητικά πεδία.

*Μη-τοπικότητα σημαίνει ότι ένα γεγονός που συμβαίνει σε ένα τόπο θα επηρεάσει ακαριαία ένα άλλο γεγονός που θα συμβεί σε έναν άλλο τόπο που βρίσκεται πάρα πολύ μακριά.

Δίνεται ο λεπτομερής υπολογισμός της Κλασσικής Χαμιλτονιανής στην περίπτωση της κίνησης ηλεκτρικού φορτίου μέσα σε μαγνητικό πεδίο και αναφέρουμε τους μετασχηματισμούς βαθμίδας. Τέλος αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση του Schrödinger είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Στο Κεφάλαιο 2 προσπαθούμε να εξηγήσουμε το φαινόμενο με την βοήθεια της Κλασσικής Μηχανικής. Βασικό εργαλείο αποτελεί η εύρεση της συνολικής ενέργειας του κινούμενου σωματιδίου η οποία ισούται με το άθροισμα της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου, της κινητικής ενέργειας του ηλεκτρονίου και της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου που παράγεται από την κίνηση του ηλεκτρονίου. Ο υπολογισμός της διαφοράς φάσης με αυτό τον τρόπο καθίσταται αδύνατη οπότε οδηγούμαστε στη μελέτη του φαινομένου από Κβαντομηχανικής σκοπιάς.

Στο Κεφάλαιο 3 πρώτα μελετάμε το ηλεκτρικό B-A φαινόμενο χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Schrödinger, με την κατάλληλη Χαμιλτονιανή, και υπολογίζουμε τη διαφορά φάσης με τη βοήθεια της αντίστοιχης ηλεκτρικής ενέργειας. Στη συνέχεια μελετάμε το μαγνητικό B-A φαινόμενο, όπου πάλι με τη χρήση της εξίσωσης του Schrödinger και λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη του ανυσματικού δυναμικού, προσδιορίζουμε τη διαφορά φάσης. Στη συνέχεια αναζητούμε την ακριβή λύση του προβλήματος της σκέδασης με τη χρήση κατάλληλων συνοριακών συνθηκών και τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών. Ακολούθως μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης και προσδιορίζουμε την σκεδαζόμενη κάθετη διατομή. Τέλος, σχολιάζουμε τα συμπεράσματά μας σχετικά με την ύπαρξη των ανυσματικών δυναμικών στη φύση.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται περιγραφή των πειραμάτων που οδήγησαν στην επαλήθευση του φαινομένου. Αυτά ήταν επιγραμματικά τα πειράματα των Chambers[13], Bayh-Mollenstedt[16], το πείραμα της διπλής σχισμής και το πείραμα του Akira Tonomura. Όλα έμελλαν να επαληθεύσουν την ύπαρξη του φαινομένου, παρά τις ενστάσεις που εγέρθησαν από τους Bocchieri και Loinger [17] τόσο σε θεωρητικό όσο και σε πειραματικό επίπεδο. Στο κεφάλαιο αυτό επίσης παρατίθενται πειραματικά αποτελέσματα και πειραματικές διατάξεις με στόχο την καλύτερη τεκμηρίωση των ισχυρισμών περί Κβαντομηχανικής ερμηνείας του φαινομένου.

Τέλος στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται μια παραλλαγή του φαινομένου B-A με την χρήση των περιστρεφόμενων υπεραγωγών. Είναι αξιοσημείωτο ότι στην κατηγορία αυτή των υπεραγωγών εμφανίζεται το φαινόμενο Meissner. Χρησιμοποιώντας ένα περιστρεφόμενο υπεραγωγό στο πείραμα της διπλής σχισμής μπορούμε να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης συναρτήσει του ανυσματικού δυναμικού. Για την πληρέστερη παρουσίαση της εργασίας στο τέλος κάθε κεφαλαίου έχουμε προσθέσει παραρτήματα στα οποία γίνονται αποδείξεις μαθηματικών σχέσεων που χρησιμοποιούνται στην εργασία.

Κεφάλαιο 1.2

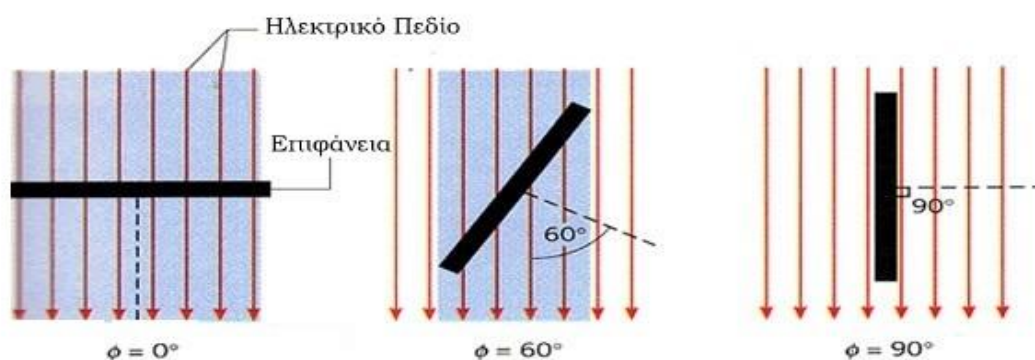
Προαπαιτούμενες γνώσεις

1.2.1 Ηλεκτρομαγνητισμός

Ο νόμος του Gauss

Η ηλεκτρική ροή είναι ανάλογη του πλήθους των γραμμών του ηλεκτρικού πεδίου που διαπερνούν μια επιφάνεια. Αν το ηλεκτρικό πεδίο είναι ομογενές και σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο σε μια επιφάνεια εμβαδού A , η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$\Phi = EA \cos(\theta). \quad (1.2.1.1)$$



Γενικά, η ηλεκτρική ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια S δίνεται από την:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{\text{εστ}}}{\epsilon_0} \quad (1.2.1.2)$$

όπου $q_{\text{εστ}}$ είναι το φορτίο που περιέχεται από την κλειστή επιφάνεια.

Διαφορά Δυναμικού

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων A , B ενός ηλεκτρικού πεδίου ορίζεται από τη σχέση:

$$\Delta V \equiv \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.2.1.3)$$

και είναι ένα βαθμωτό μέγεθος. Όταν ένα δοκιμαστικό φορτίο μετακινείται από το σημείο A στο σημείο B ενός ηλεκτρικού πεδίου τότε η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος φορτίου-πεδίου είναι:

$$\Delta U = -q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (1.2.1.4)$$

Μαγνητική Ροή

Η μαγνητική ροή που διέρχεται από μια επιφάνεια S ορίζεται:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} . \quad (1.2.1.5)$$

Δύναμη Lorentz

Η δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο q το οποίο κινείται με ταχύτητα \vec{u} μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έντασης \vec{E} και \vec{B} αντίστοιχα είναι:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) . \quad (1.2.1.6)$$

Η διεύθυνση της μαγνητικής δύναμης είναι κάθετη τόσο στην ταχύτητα όσο και στο μαγνητικό πεδίο, με μέτρο:

$$F_B = |q|uB \sin(\theta) \quad (1.2.1.7)$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου.

Ο νόμος των Biot-Savart

Ορίζει ότι σε ένα οποιοδήποτε σημείο Σ το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο $d\vec{B}$ το οποίο δημιουργείται λόγω ενός στοιχειώδους μήκους $d\vec{s}$ που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης I είναι:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I d\vec{s} \times \hat{e}_r}{4\pi r} \quad (1.2.1.8)$$

όπου μ_0 η διαπερατότητα του κενού, \hat{e}_r το μοναδιαίο διάνυσμα με φορέα που ορίζεται από το $d\vec{s}$ και το σημείο Σ και φορά από το $d\vec{s}$ προς το Σ .

Ο νόμος του Ampère

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του γινομένου $\vec{B} \cdot d\vec{s}$ κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής γ ισούται με το $\mu_0 I$ όπου I το συνολικό ρεύμα που διέρχεται από οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνορο την καμπύλη γ :

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \quad (1.2.1.9)$$

Ο νόμος των Ampère-Maxwell

Η επέκταση του νόμου του Ampère από τον Maxwell εκφράζεται από σχέση

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (1.2.1.10)$$

όπου Φ_E είναι η ηλεκτρική ροή μέσα από μια επιφάνεια.

Ο νόμος του Gauss για τον Μαγνητισμό

Ορίζει ότι η συνολική ροή που διαπερνά μια κλειστή επιφάνεια είναι μηδέν:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.2.1.11)$$

Εξισώσεις Maxwell στο κενό

Σε διαφορική μορφή η εξισώσεις του Maxwell στο κενό είναι

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{c^2 \partial t} &= \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.1.12)$$

όπου ρ η πυκνότητα φορτίου, ε_0 η διηλεκτρική σταθερά του κενού, c η ταχύτητα του φωτός, μ_0 η διαπερατότητα του κενού και \vec{J} η πυκνότητα του ρεύματος.

Οι παραπάνω εξισώσεις με αντικατάσταση του ανυσματικού δυναμικού \vec{A} και του βαθμωτού δυναμικού V παίρνουν την ισοδύναμη μορφή

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\vec{\nabla}^2 V(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{c^2 \partial t} &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{\partial}{c^2 \partial t} (\vec{\nabla} V(\vec{x}, t)) + \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V(\vec{x}, t)) - \frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.1.13)$$

Η εξαγωγή των προηγούμενων εξισώσεων βασίστηκε στις ακόλουθες ταυτότητες του διανυσματικού λογισμού

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} = 0 \quad (1.2.1.14)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \vec{\nabla} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \quad (1.2.1.15)$$

Αναλλοιότητα βαθμίδας

Θα δείξουμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x},t) &= -\vec{\nabla}V(\vec{x},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}\end{aligned}\quad (1.2.1.16)$$

είναι αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\begin{aligned}V &\rightarrow V' = V - \frac{1}{c} \partial_t f \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f\end{aligned}\quad (1.2.1.17)$$

όπου f είναι μια πραγματική συνάρτηση κλάσεως C_2 . Εάν υποθέσουμε ότι ισχύει ο προηγούμενος ισχυρισμός τότε καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα

$$\begin{aligned}\vec{E}'(\vec{x},t) &= -\vec{\nabla}V'(\vec{x},t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'(\vec{x},t)}{\partial t} = \\ &= -\vec{\nabla}V(\vec{x},t) + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} f = \\ &= \vec{E}(\vec{x},t)\end{aligned}\quad (1.2.1.18)$$

Παρόμοια για το μαγνητικό πεδίο έχουμε

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{B}\quad (1.2.1.19)$$

αφού ο τελευταίος όρος μηδενίζεται.

Επειδή το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παραμένει αναλλοίωτο κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας, οι εξισώσεις του Maxwell διατηρούν αυτή τη συμμετρία, και θα αναμέναμε η εξίσωση Schrödinger να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους ίδιους μετασχηματισμούς. Δες παράρτημα A1.

1.2.2 Κλασική Μηχανική

Οι εξισώσεις των Euler-Lagrange

Οι γενικευμένες δυνάμεις φ_α συνδέονται με την κινητική ενέργεια K με τις εξισώσεις :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial K}{\partial q_\alpha} = \varphi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \dim V. \quad (1.2.2.1)$$

Αν το σύστημα είναι συντηρητικό τότε οι δυνάμεις προκύπτουν από ένα δυναμικό ή δυναμική ενέργεια, και η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad (1.2.2.2)$$

όπου $L = K - U$ η συνάρτηση Lagrange του συστήματος.

Η συνάρτηση του Hamilton

Η συνάρτηση Hamilton ορίζεται από την συνάρτηση Lagrange από τη σχέση:

$$H = \sum_{a=1}^n p_a \dot{q}_a - L \quad (1.2.2.3)$$

και είναι συνάρτηση μόνο των γενικευμένων συντεταγμένων q_a και των γενικευμένων ορμών p_a .

Οι εξισώσεις του Hamilton

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του Hamilton οι εξισώσεις κίνησης ενός συστήματος μπορούν να γραφούν στη συμμετρική μορφή

$$\begin{aligned} \dot{p}_a &= -\frac{\partial H}{\partial q_a} \\ \dot{q}_a &= \frac{\partial H}{\partial p_a} \end{aligned} \quad (1.2.2.4)$$

Αυτές είναι οι γνωστές εξισώσεις του Hamilton.

Η συνάρτηση του Hamilton για συντηρητικά πεδία

Η συνάρτηση του Hamilton για συντηρητικά πεδία δίνεται από το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας δηλαδή

$$H = K + U . \quad (1.2.2.5)$$

Υπολογισμός της κλασσικής Χαμιλτονιανής

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε την κλασσική Χαμιλτονιανή ενός σημειακού φορτίου q που κινείται σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με ταχύτητα \vec{u} .

Οι εξισώσεις του Maxwell σε διαφορική μορφή για χρονοεξαρτημένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δίνονται από τις σχέσεις:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\vec{\nabla} V(\vec{x}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad \text{και} \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{x}, t). \quad (1.2.2.6)$$

Η δύναμη Lorenz τότε γράφεται

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= q(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B}) \\
&= q(-\vec{\nabla}V - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))
\end{aligned} \tag{1.2.2.7}$$

και έχει συνιστώσες

$$\begin{aligned}
F_i &= q(-\partial_i V - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}(\vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))_i) \\
&= q(-\partial_i V - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}\sum_{j=1}^3 u_j F_{ij}) \\
&\equiv q(-\partial_i V - \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{1}{c}u_j F_{ij})
\end{aligned} \tag{1.2.2.8}$$

Εδώ χρησιμοποιούμε τη σύμβαση άθροισης κατά Einstein σύμφωνα με την οποία όταν ένας δείκτης επαναλαμβάνεται αθροίζεται σε όλες τις δυνατές του τιμές. Η προηγούμενη σχέση για τις συνιστώσες της μαγνητικής δύναμης, αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ijk} u_j (\vec{\nabla} \times \vec{A})_k &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} u_j \partial_l A_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} u_j \partial_l A_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) u_j \partial_l A_m \\
&= u_m \partial_i A_m - u_j \partial_j A_i \\
&= u_j (\partial_i A_j - \partial_j A_i) = u_j F_{ij}
\end{aligned} \tag{1.2.2.9}$$

όπου ε_{ijk} είναι το σύμβολο των Levi-Civita.

Το σύμβολο μετάθεσης στην τρισδιάστατη εκδοχή του ((i,j,k)={1,2,3}) ορίζεται μαθηματικά με τον ακόλουθο τρόπο

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu(i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1) \\ -1, & \alpha\nu(i, j, k) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1) \\ 0, & \alpha\nu i = j \text{ ή } i = k \text{ ή } j = k \end{cases}$$

δηλαδή, το σύμβολο μετάθεσης ε_{ijk} ισούται με μονάδα αν η τριάδα (i, j, k) είναι μία άρτια μετάθεση των $(1, 2, 3)$, -1 στην περίπτωση που είναι περιττή μετάθεση αυτών και 0 όταν οποιοσδήποτε από τους δείκτες επαναλαμβάνεται. Η τιμή του συμβόλου μετάθεσης συναρτήσει των τιμών των δεικτών (i, j, k) δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{(i-j)(j-k)(k-i)}{2}$$

Στην απόδειξη της σχέσης (1.2.2.9) χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του συμβόλου των Levi-Civita.

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (1.2.2.10)$$

η οποία αποδεικνύεται ως εξής :

Το σύμβολο των Levi-Civita στις τρεις διαστάσεις σχετίζεται με το δέλτα του Kronecker με την ορίζουσα

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{il} (\delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}) - \delta_{im} (\delta_{jl} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{kl}) + \delta_{in} (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (1.2.2.11)$$

Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω αποτελέσματος αποτελεί η σχέση

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad (1.2.2.12)$$

που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Τώρα η σχέση

$$\begin{aligned} \frac{dA_i(\vec{x}(t), t)}{dt} &= \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial A_i(\vec{x}(t), t)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \\ &= \frac{\partial A_i(\vec{x}, t)}{\partial t} + u_j(t) \partial_j A_i(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.2.2.13)$$

με $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3$, μας βοηθά ισodύναμα να γράψουμε τους όρους που εξαρτώνται από το ανυσματικό δυναμικό ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial t} - u_j F_{ij} &= \frac{\partial A_i}{\partial t} - u_j (\partial_i A_j) + u_j (\partial_j A_i) \\ &= \frac{\partial A_i}{\partial t} - u_j (\partial_i A_j) + \frac{dA_i}{dt} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \\ &= -\partial_i (\vec{u} \cdot \vec{A}) + \frac{d}{dt} [\partial_{u_i} (\vec{u} \cdot \vec{A})] \end{aligned} \quad (1.2.2.14)$$

Η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί:

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{d(\delta_{ij} A_j)}{dt} = \frac{d}{dt} (A_j \partial_{u_i} u_j) = \frac{d}{dt} [\partial_{u_i} (\vec{u} \cdot \vec{A})] \quad \text{με } \partial_{u_i} u_j = \delta_{ij} \quad (1.2.2.15)$$

Άρα τελικά η δύναμη γράφεται:

$$F_i = -\partial_i U + \frac{d}{dt} (\partial_{u_i} U) \quad (1.2.2.16)$$

με

$$U = qV - \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} \quad (1.2.2.17)$$

να είναι το γενικευμένο δυναμικό. Η δύναμη σε διανυσματική μορφή γράφεται:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U + \frac{d}{dt}(\partial_{u_i}U) . \quad (1.2.2.18)$$

Εδώ θεωρήσαμε ότι το δυναμικό V δεν εξαρτάται από την ταχύτητα, δηλαδή $\partial_{u_i}V = 0$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη Χαμιλτονιανή του συστήματος θα προσδιορίσουμε πρώτα τη συνάρτηση του Lagrange. Είναι γνωστό ότι:

$$L = K - U = \frac{p^2}{2m} - qV + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} \quad (1.2.2.19)$$

Η κανονική ορμή δίνεται από τη σχέση

$$P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial u_j} = mu_j + \frac{q}{c} A_j \quad \text{άρα} \quad p_j = P_j - \frac{q}{c} A_j \quad (1.2.2.20)$$

και Χαμιλτονιανή του συστήματος γράφεται:

$$H = P_j u_j - L = mu^2 + \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{u} - L = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} + qV . \quad (1.2.2.21)$$

Παράρτημα A1

Σε αυτό το παράρτημα θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση του Schrödinger είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\begin{aligned} V &\rightarrow V' = V - \frac{1}{c} \partial_t f \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f \end{aligned} \quad (\text{A.1.1})$$

Όπως αποδείξαμε η κλασική Χαμιλτονιανή έχει την μορφή

$$H = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A})^2}{2m} + qV \quad (\text{A.1.2})$$

οπότε χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς (A.1.1) η μετασχηματισμένη Χαμιλτονιανή γράφεται

$$H' = \frac{(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A}')^2}{2m} + qV' . \quad (\text{A.1.3})$$

Η εξίσωση του Schrödinger είναι τότε

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = \hat{H}' \psi' \quad (\text{A.1.4})$$

ή ισοδύναμα

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \hat{A} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \right)^2 + q\hat{V} - \frac{q}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \right] \psi'(\vec{r}, t) . \quad (\text{A.1.5})$$

Εάν η κυματοσυνάρτηση μετασχηματίζεται σαν

$$\psi'(\vec{r}, t) = e^{iqf(\vec{r}, t)/\hbar c} \psi(\vec{r}, t) \quad (\text{A.1.6})$$

τότε θα αποδείξουμε τις εξείς σχέσεις

$$e^{-iqf(\vec{r}, t)/\hbar c} (\hat{H}' - q\hat{V}') \psi' = \hat{H} \psi \quad (\text{A.1.7})$$

$$e^{-iqf(\vec{r}, t)/\hbar c} i\hbar \partial_t \psi' = \left(i\hbar \partial_t - \frac{q}{c} \partial_t f(\vec{r}, t) \right) \psi$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_t \psi' &= i\hbar \left(\left(\frac{iq}{\hbar c} \partial_t f \right) e^{iqf(\vec{r}, t)/\hbar c} \psi + e^{iqf(\vec{r}, t)/\hbar c} \partial_t \psi \right) \\ &= e^{iqf(\vec{r}, t)/\hbar c} \left(-\frac{q}{c} \partial_t f \psi + i\hbar \partial_t \psi \right) \\ \hat{H}' \psi' &= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q\hat{A}}{c} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \right) \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q\hat{A}}{c} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \right) \psi' + q\hat{V}' \psi' - \frac{q}{c} \partial_t f \psi' \end{aligned} \quad (\text{A.1.8})$$

Οπότε από το πρώτο μέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q\hat{A}}{c} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \right) e^{iqf(\vec{r},t)/\hbar c} \left[-i\hbar \vec{\nabla} \psi - \frac{q\hat{A}}{c} \psi - \frac{q}{c} (\vec{\nabla} f) \psi + \hbar \psi \left(\vec{\nabla} \frac{qf}{\hbar c} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q\hat{A}}{c} - \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \right) e^{iqf(\vec{r},t)/\hbar c} \left[-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q\hat{A}}{c} \right] \psi \\
&= e^{iqf(\vec{r},t)/\hbar c} -i\hbar \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} \psi - \left(\frac{q}{c} \right)^2 \vec{\nabla} f \cdot \hat{A} \psi + (-i\hbar \vec{\nabla})^2 + i\hbar \frac{q}{c} \vec{\nabla} \cdot \hat{A} \psi + i\hbar \frac{q}{c} \hat{A} \cdot \vec{\nabla} \psi + i\hbar \frac{q}{c} \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} \psi + \left(\frac{q}{c} \right)^2 \hat{A}^2 \psi + \left(\frac{q}{c} \right)^2 \vec{\nabla} f \cdot \hat{A} \psi \\
&= \frac{1}{2m} e^{iqf(\vec{r},t)/\hbar c} \left[-i\hbar \vec{\nabla} - \frac{q\hat{A}}{c} \right]^2 \psi
\end{aligned}$$

Για την δεύτερη πολλαπλασιάζοντας με $e^{-iqf/\hbar c}$ έχουμε

$$i\hbar \partial_i \psi - \frac{q}{c} \partial_i \psi = e^{-iqf/\hbar c} i\hbar \partial_i \psi'$$

Άρα αποδείξαμε τις σχέσεις και η εξίσωση Schrodinger παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας.

Κεφάλαιο 2

2.1 Το φαινόμενο Bohm-Aharonov στην Κλασσική Μηχανική

Το B-A φαινόμενο είναι αδύνατο να ερμηνευθεί από την Κλασσική Μηχανική και μόνο η Κβαντομηχανική μπορεί να το εξηγήσει με την εισαγωγή των τελεστών του ανυσματικού δυναμικού \vec{A} και του βαθμωτού δυναμικού V στις εξισώσεις του Hamilton και κατ' επέκταση στην εξίσωση του Schrödinger.

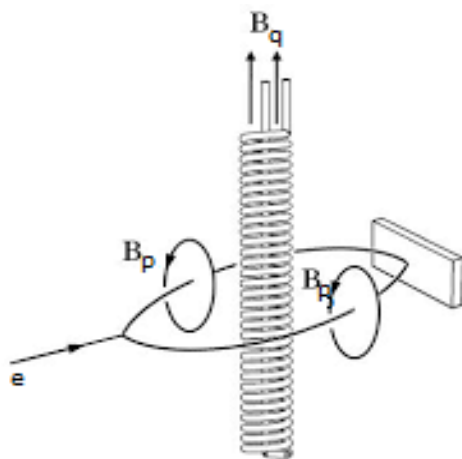
Όταν η κλασσική θεωρία εφαρμόζεται ακολουθώντας την Λαγκραζιανή ή Χαμιλτονιανή προσέγγιση, τα δυναμικά να μεν εμφανίζονται όπως στην Κβαντομηχανική αλλά κατέχουν διαφορετική υπόσταση. Οι δύο προηγούμενες προσεγγίσεις ισοδυναμούν με τους νόμους του Νεύτωνα. Η εξίσωση της κλασσικής κίνησης ενός φορτισμένου σωματιδίου υπό την παρουσία μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου περιγράφεται από νόμο του Newton και της δύναμης του Lorenz:

$$m\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) = -q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{u} \times \vec{B}\right) \quad (2.1.1)$$

Στο παρελθόν έχουν γίνει προσπάθειες να ερμηνευθεί το B-A φαινόμενο εφαρμόζοντας την Κλασσική ή Ημικλασσική θεωρία στο φαινόμενο της συμβολής και στον προσδιορισμό του πλάτους σκέδασης για δέσμη φορτισμένων σωματιδίων που σκεδάζεται από μαγνητικό πεδίο. Για μικρό φορτίο e το πλάτος στο φαινόμενο της συμβολής είναι ανάλογο του τετραγώνου του φορτίου ενώ στην σκέδαση ανάλογο της τέταρτης δύναμης του φορτίου. Αυτό είναι σε αντίθεση με τις προβλέψεις της Κβαντομηχανικής σύμφωνα με τις οποίες οι αντίστοιχες ποσότητες είναι ανάλογες της πρώτης και της δεύτερης δύναμης του ηλεκτρικού φορτίου.

Για την καλύτερη κατανόηση της εμφάνισης της κλασσικής εξωτερικής δύναμης θα μελετήσουμε το μαγνητικό B-A φαινόμενο. Η ουσία του επιχειρήματος εστιάζεται στην ολική ενέργεια του φορτισμένου σωματιδίου που δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{1}{2\mu_0} \int (\vec{B}_q^2 + 2\vec{B}_q \cdot \vec{B}_p + \vec{B}_p^2) dV + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.1.2)$$



Σχ(2.1)

όπου \vec{B}_q είναι το σταθερό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ένα σωληνοειδές που διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης, και \vec{B}_p είναι το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από την κίνηση του ηλεκτρονίου της εκπεμπόμενης δέσμης. Ο πρώτος όρος στην ολική ενέργεια αντιπροσωπεύει τη δυναμική ενέργεια του ηλεκτρονίου υπό την παρουσία του συνιστάμενου μαγνητικού πεδίου ενώ ο δεύτερος όρος περιγράφει την κινητική του ενέργεια.

Για να υπολογίσουμε τη συνολική δυναμική ενέργεια βρίσκουμε πρώτα τη δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο σωληνοειδές πηνίο. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου δίνεται από τη σχέση [11]

$$L = \mu_0 n^2 V \quad (2.1.3)$$

ενώ το μαγνητικό του πεδίο είναι [11]

$$B_q = \mu_0 n I \quad (2.1.4)$$

Αντικαθιστώντας το L και την

$$I = \frac{B_q}{\mu_0 n} \quad (2.1.5)$$

στην έκφραση που δίνει την αποθηκευμένη ενέργεια του πηνίου

$$U_q = \frac{1}{2} L I^2 \quad (2.1.6)$$

βρίσκουμε ότι

$$U_q = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V \left(\frac{B_q}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B_q^2}{2 \mu_0} V \quad (2.1.7)$$

Οπότε η πυκνότητα της μαγνητικής ενέργειας, δηλαδή η αποθηκευμένη ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο αν μονάδα όγκου είναι :

$$u_B = \frac{U_q}{V} = \frac{B_q^2}{2 \mu_0} \quad (2.1.8)$$

με $\mu_0 = 4\pi/c$. Για να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια του μαγνητικού πεδίου $\vec{B} = \vec{B}_q + \vec{B}_p$, συνολικά στον χώρο, αρκεί να ολοκληρώσουμε την πυκνότητα της συνολικής μαγνητικής ενέργειας, οπότε έχουμε:

$$U_{\text{ολ}} = \int_{\Omega} u_B dV = \int_{\Omega} \frac{B^2}{2 \mu_0} dV = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\Omega} (\vec{B}_q + \vec{B}_p)^2 dV = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\Omega} (B_q^2 + 2 \vec{B}_q \cdot \vec{B}_p + B_p^2) dV \quad (2.1.9)$$

Αρα τελικά η συνολική ενέργεια δίνεται από το άθροισμα της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας,

$$E_{\text{tot}} = U + K = \frac{1}{2 \mu_0} \int_{\Omega} (B_q^2 + 2 \vec{B}_q \cdot \vec{B}_p + B_p^2) dV + \frac{1}{2} m_e v_e^2 \quad (2.1.10)$$

με μ_0 σταθερά που ονομάζεται διαπερατότητα του κενού και ισούται με την τιμή $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} T \cdot m / A$. Από τη σχέση αυτή παρατηρούμε ότι για σταθερή ταχύτητα ηλεκτρονίων η κινητική ενέργεια καθώς και ο όρος B_p^2 είναι σταθεροί. Η ποσότητα όμως $\vec{B}_q \cdot \vec{B}_p$ δεν μπορεί να είναι σταθερή, καθώς τα ηλεκτρόνια πλησιάζουν και απομακρύνονται από το σωληνοειδές, οπότε η ταχύτητα αλλάζει διεύθυνση και άρα δεν είναι σταθερή.

Το επιχείρημα αυτό είναι εσφαλμένο γιατί αφαιρώντας και από τα δύο μέλη της ενέργειας την ποσότητα

$$\frac{1}{2\mu_0} \int B_q^2 dV \quad (2.1.11)$$

η μεταβολή του όρου $\vec{B}_q \cdot \vec{B}_p$ ακυρώνει το πεπερασμένο σφάλμα που προκύπτει από τη διαφορά, και το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας, που οφείλεται στο B_p^2 , παραμένει σταθερό όπως αναμενόταν.

Ποιο συγκεκριμένα η ενέργεια του ολικού μαγνητικού πεδίου που είναι ανάλογη του $\int \vec{B}^2 dV$ περιέχει τον όρο $\int \vec{B}_q \cdot \vec{B}_p dV$ και δημιουργείται το ερώτημα εάν η αλλαγή στην ενέργεια οφείλεται στην κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων.

Φανταστείτε ένα κούφιο κύλινδρο ακτίνας a και μήκους $L \gg a$ με τον άξονα συμμετρίας του να ταυτίζεται με το z-άξονα. Η αρχή του συστήματος συντεταγμένων βρίσκεται στο μέσο του κυλίνδρου. Ένα σταθερό ρεύμα έντασης I διαρρέει κάθε σπείρα του σωληνοειδούς ακολουθώντας τον κανόνα της δεξιάς χειρός. Ένα ελεύθερο ηλεκτρόνιο που διέρχεται κοντά αλλά εξωτερικά του κυλίνδρου, θα αντιλαμβάνεται την ύπαρξη τόσο του τοπικού μαγνητικού πεδίου τάξης $(a/L)^2$ όσο και του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Θα μελετήσουμε το B-A φαινόμενο στην περίπτωση που το $\lim L \rightarrow +\infty$ και η ακτίνα a διατηρείται σταθερή.

Η συνολική ενέργεια δίνεται από το άθροισμα

$$E_{tot} = U_q + E_i + E_p \quad (2.1.12)$$

όπου $E_p = K + U_p$ και E_i η ενέργεια αλληλεπίδρασης που οφείλεται στο μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από την κίνηση του ηλεκτρονίου με το μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι $4\pi\tilde{I}/c$ και η αντίστοιχη ενέργεια υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$U_q = \frac{1}{8\pi} \int B_q(x)^2 dV = 2 \left(\frac{\pi\tilde{I}a}{q} \right)^2 L \left(1 + 0 \left(\frac{a}{L} \right) \right) \quad (2.1.13)$$

όπου I είναι η πυκνότητα του ρεύματος $\tilde{I} = \left(n_0 I / L \right)$, δηλαδή το συνολικό ρεύμα που διαρρέει

το σωληνοειδές ανά μονάδα μήκους, και ο διορθωτικός όρος τάξης (a/L) που λαμβάνει υπόψη του τα επιφανειακά φαινόμενα (λόγω ατελειών στην πυκνότητα των σπειρών) και την παραγόμενη μαγνητική ροή θα παραλείπεται στο εξής.

Το ρεύμα \tilde{I} μπορεί να σταθεροποιηθεί είτε θεωρώντας το όριο $\lim L \rightarrow +\infty$ είτε προσθέτοντας πειραματικές διατάξεις των οποίων η ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της έντασης του ηλεκτρικού ρεύματος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με δεύτερο πηνίο που

διαθέτει μεγαλύτερη αυτεπαγωγή ή με ένα σφόνδυλο συνδεδεμένο με μια γεννήτρια για την παροχή του ρεύματος.

Σε κάθε περίπτωση

$$U_q = \frac{1}{2} W \tilde{I}^2 \quad (2.1.14)$$

με W σταθερά που περιλαμβάνει τις συνεισφορές από την (2.1.13), την αυτεπαγωγή πρόσθετου πηνίου και την κινητική ενέργεια του σφονδύλου. Αυτό που θέλουμε να επιτύχουμε είναι η E_p να είναι ανάλογη του \tilde{I}^2 και το εξωτερικό πεδίο να αντιστοιχεί στο $\lim W \rightarrow +\infty$.

Το ελεύθερο σωματίδιο έχει ενέργεια E_p που γράφεται σαν το άθροισμα της κινητικής του ενέργεια $\frac{1}{2}(m_e v^2)$ και της δυναμικής ενέργεια που οφείλεται στο παραγόμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_p(\vec{x}, t)$. Το μέτρο του $\vec{B}_p(\vec{x}, t)$ είναι ανάλογο της ταχύτητας ενώ η δυναμική ενέργεια ανάλογη της v^2 (δες το παράρτημα Α.3 για την απόδειξη). Οι ενέργειες μπορούν να συνδυαστούν έχοντας σαν κοινό παράγοντα το τετράγωνο της ταχύτητας, δηλαδή,

$$E_p = \frac{1}{2} M v^2 \quad (2.1.15)$$

με $M = m_e + k$.

Η ενέργεια αλληλεπίδρασης δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$E_i = \frac{1}{4\pi} \int \vec{B}_q \cdot \vec{B}_p dV = \frac{1}{c} \int \Phi_p(z, t) dz \quad (2.1.16)$$

$$\text{με } \vec{B}_q = \frac{4\pi \tilde{I}}{c} \hat{e}_z$$

και

$$\Phi_p(z, t) = \iint B_{pz}(x, y, z, t) dx dy. \quad (2.1.17)$$

Η $\Phi_p(z, t)$ συμβολίζει τη μαγνητική ροή του $B_p(x, t)$ στο ύψος z μέσα από την κάθετη διατομή του σωληνοειδούς που είναι ο κυκλικός δίσκος $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Το χρονοεξαρτώμενο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}_p(\vec{x}, t)$ δημιουργεί διαφορά δυναμικού (ή ηλεκτρεγερτική δύναμη) $\frac{\partial \Phi_p(z, t)}{\partial t}$ και το αντίστοιχο ρεύμα είναι αντίθετο του ρεύματος I . Οπότε η μεταβολή της ενέργειας θα είναι

$$\frac{d}{dt} E_i = \tilde{I} \int -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_p(z, t) dz = -\frac{dE_i}{dt} \quad (2.1.18)$$

Έτσι ενώ η E_i μεταβάλλεται κατά πεπερασμένο ποσό όταν η δέσμη των σωματιδίων διέρχεται κοντά στο σωληνοειδές, το άθροισμα $E_i + E_f$ διατηρείται σταθερό. Τότε η E_p είναι σταθερή και η ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταβάλλεται σε βάρος της ενέργειας του μαγνητικού πεδίου και της πηγής των ηλεκτρονίων.

Για πεπερασμένη τιμή του W , που σημαίνει πεπερασμένο μήκος σωληνοειδούς, το ρεύμα \tilde{I} και το πεδίο στο εσωτερικό του μεταβάλλονται καθώς το σωματίδιο κινείται πλησίον του. Άρα

$$\delta\tilde{I} = \frac{\delta E_i}{W\tilde{I}} \quad (2.1.19)$$

στο όριο $\lim L \rightarrow +\infty$, όπου και το $\lim W \rightarrow +\infty$, το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο παραμένει σταθερό και η άπειρη ενέργεια του μεταβάλλεται κατά πεπερασμένο ποσό έτσι ώστε η συνολική του ενέργεια να διατηρείται σταθερή.

Η ενέργεια μπορεί να αντικατασταθεί από την Χαμιλτονιανή οπότε μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση της κίνησης σε εξωτερικό πεδίο είναι ορθή στα όρια του B-A, το οποίο σημαίνει ότι η ταχύτητα παραμένει σταθερή.

Στην ημικλασσική περίπτωση, χρησιμοποιώντας κατάλληλα την ολική Λαγκρανζιανή πυκνότητα μπορούμε να απομακρύνουμε την αλλαγή φάσης η οποία εμφανίζεται λόγω της χρήσης του όρου $\frac{dE_i}{dt}$ και όχι του $\frac{dE_1}{dt}$.

2.2 Προσδιορισμός του τελεστή Χάμιλτον και της Πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας

Θα προσδιορίσουμε τον τελεστή του Χάμιλτον που περιγράφει την κίνηση φορτισμένου σημειακού φορτίου σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από σωληνοειδές όταν διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης. Υποθέτουμε ότι ο z-άξονας ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του σωληνοειδούς.

Έχουμε αποδείξει ότι η κλασσική Χαμιλτονιανή του σημειακού φορτίου στην περίπτωση αυτή δίνεται από τη συνάρτηση

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (2.2.1)$$

Οπότε χρησιμοποιώντας το νόμο της αντιστοιχίας και τον ορισμό του τελεστή της ορμής

$$\vec{P} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (2.2.2)$$

έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2m} \left(\vec{\hat{P}} - \frac{q}{c} \vec{\hat{A}} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2m} \left(\vec{\hat{P}} - \frac{q}{c} \vec{\hat{A}} \right) \cdot \left(\vec{\hat{P}} - \frac{q}{c} \vec{\hat{A}} \right) \\
&= \frac{1}{2m} \left(\vec{\hat{P}} \cdot \vec{\hat{P}} - \frac{q}{c} \vec{\hat{P}} \cdot \vec{\hat{A}} - \frac{q}{c} \vec{\hat{A}} \cdot \vec{\hat{P}} + \frac{q^2}{c^2} \vec{\hat{A}} \cdot \vec{\hat{A}} \right) \quad (2.2.3) \\
&= \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q}{c} i\hbar \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{A}} + \vec{\hat{A}} \cdot \vec{\nabla} \right) + \frac{q^2}{c^2} \vec{\hat{A}} \cdot \vec{\hat{A}} \right)
\end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ταυτότητα για τελεστές

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{A}} + \vec{\hat{A}} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{A}} + 2\vec{\hat{A}} \cdot \vec{\nabla} \quad (2.2.4)$$

Απόδειξη

Ο μεταθέτης της x-συνιστώσας της ορμής με τη x-συνιστώσα του τελεστή του ανυσματικού δυναμικού, ο οποίος δρα πολλαπλασιαστικά και εκφράζεται σαν πολυώνυμο ως προς X, Y, Z, είναι

$$\left[\hat{p}_x, \hat{A}_x \right] \psi = \psi \left(\hat{p}_x \hat{A}_x \right) - \hat{A}_x \left(\hat{p}_x \psi \right) \quad (2.2.5)$$

Από τη σχέση αυτή εύκολα προκύπτει η (2.2.6).

Η Χαμιλτονιανή γράφεται τότε στην ισοδύναμη μορφή

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q}{c} i\hbar \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{A}} + 2\vec{\hat{A}} \cdot \vec{\nabla} \right) + \frac{q^2}{c^2} \vec{\hat{A}} \cdot \vec{\hat{A}} \right) \quad (2.2.6)$$

Αυτή τη σχέση θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο, σχέση (3.2.1).

Παράρτημα Α.2

Εξίσωση συνέχειας για το ανυσματικό δυναμικό

Η πυκνότητα του ρεύματος πιθανότητας στην προκειμένη περίπτωση δίνεται από τη σχέση

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)}{2im} - \frac{q}{mc} \vec{A} \rho \quad (\text{A.2.1})$$

όπου $\rho = \psi \psi^*$.

Απόδειξη

Ξεκινώντας από την εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi \quad (\text{A.2.2})$$

και πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά με τη μιγαδική συζυγή της ψ , την ψ^* , έχουμε:

$$i\hbar \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi^* \hat{H} \psi \quad (\text{A.2.3})$$

Η συζυγή εξίσωση του Schrödinger είναι

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \hat{H} \psi^* \quad (\text{A.2.4})$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας με ψ πάλι από τα αριστερά έχουμε

$$-i\hbar \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = \psi \hat{H} \psi^* \quad (\text{A.2.5})$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (A.2.3) και (A.2.5) προκύπτει ότι

$$i\hbar \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \psi^* \hat{H} \psi - \psi \hat{H} \psi^* \quad (\text{A.2.6})$$

Το δεύτερο μέλος της εξίσωσης γράφεται

$$\frac{1}{2m} \left[\psi^* \left(-\hbar^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{q}{c} i\hbar (\vec{\nabla} \cdot \hat{A} + 2\hat{A} \cdot \vec{\nabla}) + \frac{q^2}{c^2} \hat{A}^2 \right) \psi - \psi \left(-\hbar^2 \vec{\nabla}^2 + \frac{q}{c} i\hbar (\vec{\nabla} \cdot \hat{A} + 2\hat{A} \cdot \vec{\nabla}) + \frac{q^2}{c^2} \hat{A}^2 \right) \psi^* \right] =$$

$$\frac{1}{2m} \left[(\hbar^2 \psi \vec{\nabla}^2 \psi^* - \hbar^2 \psi^* \vec{\nabla}^2 \psi) + \frac{q}{c} i\hbar (\psi^* \vec{\nabla} \cdot \hat{A} \psi + \psi^* 2\hat{A} \cdot \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \cdot \hat{A} \psi^* - \psi \hat{A} \cdot \vec{\nabla} \psi^*) \right]$$

και η εξίσωση γράφεται

$$i\hbar \frac{\partial(\psi\psi^*)}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \left[(\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) + \frac{q}{2c} i\hbar (\psi^* 2\hat{A} \cdot \nabla \psi + \psi 2\hat{A} \cdot \nabla \psi^*) \right] \quad (\text{A.2.7})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) + \frac{q}{mc} (\psi^* \hat{A} \cdot \nabla \psi + \psi \hat{A} \cdot \nabla \psi^*)$$

Η (A.2.7) λαμβάνει την τελική μορφή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (\text{A.2.8})$$

όπου η πυκνότητα του ρεύματος πιθανότητας ορίζεται από την

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{q}{cm} \bar{A} \rho \quad (\text{A.2.9})$$

Η εξίσωση (A.2.8) είναι η γνωστή εξίσωση συνέχειας στην Κβαντομηχανική η οποία θα χρησιμοποιηθεί αργότερα.

Παράρτημα A.3

Από τον νόμο των *Biot-Savart* (1.2.1.8) η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε τυχαίο σημείο του χώρου που απέχει απόσταση r από στοιχειώδη αγωγό μήκους ds που διαρρέεται από ρεύμα σταθερής έντασης I , δίνεται από την

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I ds \times \hat{e}_r}{4\pi r^2} \quad (\text{A.3.1})$$

Η ένταση του ρεύματος, που είναι ο ρυθμός μεταβολής του ηλεκτρικού φορτίου που διαπερνά την κάθετη διατομή του αγωγού, δίνεται από την σχέση $I = \frac{dq}{dt}$ ενώ η ταχύτητα του ελεύθερου ηλεκτρονίου είναι $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$. Αντικαθιστώντας τις προηγούμενες σχέσεις στην αρχική έχουμε

$$d\vec{B} = \frac{dq}{dt} \frac{\mu_0 \vec{v} dt \times \hat{e}_r}{4\pi r} = \frac{\mu_0 dq \vec{v} \times \hat{e}_r}{4\pi r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times \hat{e}_r}{4\pi r} \quad (\text{A.3.2})$$

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 q \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta)}{4\pi r}$$

Για κινούμενο σημειακό φορτίο q το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται στον περιβάλλοντα χώρο δίνεται από την (A.3.2) με μέτρο ανάλογο του τετραγώνου της ταχύτητάς του.

Κεφάλαιο 3

Η κβαντική εξήγηση του φαινομένου *Bohm-Aharonov*

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το πρόβλημα από τη σκοπιά της Κβαντομηχανικής αφού η Κλασσική Φυσική αδυνατεί να το ερμηνεύσει.

Στην Κλασσική Ηλεκτροδυναμική το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r}, t)$ και το βαθμωτό $V(\vec{r}, t)$ ηλεκτρικό δυναμικό εισήχθησαν για να απλοποιηθεί ο υπολογισμός του μαγνητικού και ηλεκτρικού πεδίου αντίστοιχα. Για να λάβουμε ένα κλασσικό κανονικό φορμαλισμό είναι απαραίτητη η ύπαρξη των ανυσματικών δυναμικών. Βέβαια οι θεμελιώδεις εξισώσεις της κίνησης μπορούν να εκφραστούν απευθείας μόνο με τη χρήση αυτών των πεδίων.

Στην Κβαντομηχανική ο κανονικός φορμαλισμός είναι απαραίτητος και τα δυναμικά δεν μπορούν να απαλειφθούν από τις εξισώσεις της κίνησης. Οι εξισώσεις της κίνησης και οι φυσικές ποσότητες είναι αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, δηλαδή

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}f(\vec{r}, t)$$

Έτσι τα ανυσματικά δυναμικά δεν έχουν επιπλέον αυτοτελή σημασία ακόμα και στην Κβαντομηχανική.

Στην παρούσα εργασία θα αποδείξουμε ότι τα προηγούμενα συμπεράσματα δεν είναι σωστά και απαιτείται μια διαφορετική προσέγγιση για τα δυναμικά στην Κβαντομηχανική. Ο χώρος Hilbert στον οποίο θα επιλύσουμε το πρόβλημά μας είναι ο απειροδιάστατος, μιγαδικός και διαχωρίσιμος χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλαδή

$$H = H_r \otimes H_\theta = L^2([0, \infty), r dr) \otimes L^2([-\pi, \pi), d\theta)$$

3.1 Πειράματα που αποδεικνύουν την αναγκαιότητα ύπαρξης των ανυσματικών δυναμικών στην Κβαντομηχανική. Ηλεκτρικό φαινόμενο *Bohm-Aharonov*.

Σε αυτή την ενότητα, θα μελετήσουμε διάφορα πειράματα τα οποία καταδεικνύουν τη σημασία των δυναμικών στην Κβαντική θεωρία.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα φορτισμένο σωματίδιο το οποίο εισέρχεται μέσα από ένα κλουβί Faraday που είναι συνδεδεμένο με μια εξωτερική γεννήτρια που παράγει ένα εναλλασσόμενο δυναμικό στο κλουβί. Το ηλεκτρικό δυναμικό $V(\vec{r}, t) = V(t)$ στο εσωτερικό του κλουβιού θα υποθέσουμε ότι είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου. Στο μη σχετικιστικό όριο, για την περιοχή μέσα στο κλουβί, η Χαμιλτονιανή δίνεται από την

$$H = H_0 + U(t) \tag{3.1.1}$$

όπου H_0 είναι η Χαμιλτονιανή του ελεύθερου σωματιδίου και $U(t) = qV(t)$ η δυναμική του ενέργεια λόγω της ύπαρξης του ηλεκτρικού πείου. Η συνάρτηση V είναι το δυναμικό.

Εάν η $\psi_0(\vec{r}, t)$ είναι λύση της ελεύθερης εξίσωσης του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0(\vec{r}, t)}{\partial t} = H_0 \psi_0(\vec{r}, t) \tag{3.1.2}$$

τότε η

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) e^{-iS(t)/\hbar} \text{ με } S(t) = \int_0^t U(\tau) d\tau \quad (3.1.3)$$

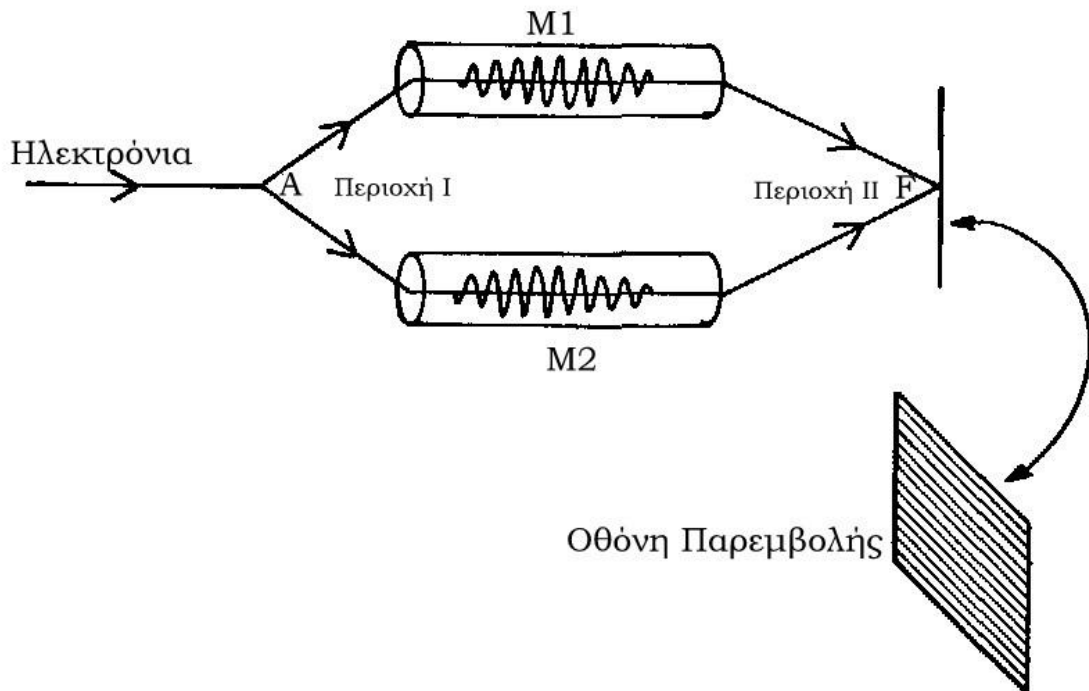
είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger με την αλληλεπίδραση $U(t)$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= i\hbar \left(\frac{\partial \psi_0(\vec{r}, t)}{\partial t} - \psi_0(\vec{r}, t) \frac{i}{\hbar} \frac{dS(t)}{dt} \right) e^{-iS/\hbar} \\ &= \left(i\hbar \frac{\partial \psi_0(\vec{r}, t)}{\partial t} + \psi_0(\vec{r}, t) \frac{dS(t)}{dt} \right) e^{-iS/\hbar} \\ &= [H_0 + U(t)] \psi(\vec{r}, t) = H \psi(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η λύση μας διαφέρει από τη λύση του ελεύθερου σωματιδίου κατά ένα παράγοντα φάσης.

Τώρα υποθέτουμε ένα πιο σύνθετο πείραμα στο οποίο μια ενιαία δέσμη ηλεκτρονίων χωρίζεται σε δύο υποδέσμες που κάθε μία διέρχεται μέσα από ένα μεταλλικό κυλινδρικό σωλήνα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Οι δύο δέσμες αφού διέλθουν μέσα από τους σωλήνες, συμβάλουν στο σημείο F. Με τη χρήση ηλεκτρικού διαφράγματος η δέσμη διαχωρίζεται και διαδίδεται σε κυματοπακέτα που είναι μεγαλύτερα από το μήκος κύματος λ αλλά μικρότερα από το μήκος των σωλήνων. Το δυναμικό σε κάθε σωλήνα ελέγχεται από ένα μηχανισμό χρονικής καθυστέρησης έτσι ώστε το δυναμικό να είναι μηδέν στην περιοχή I. Κάθε κυματοπακέτο θα πρέπει να περιέχεται εξολοκλήρου στο σωλήνα.



Σχ.(3.1.1) Μια συνεκτική δέσμη ηλεκτρονίων στο σημείο A χωρίζεται στα δύο. Στη συνέχεια κάθε υποδέσμη περνά από τους μεταλλικούς κυλίνδρους M1 και M2 που τελικά συμβάλουν στο σημείο F.

Το δυναμικό αυξάνεται σε συνάρτηση του χρόνου αλλά με διαφορετικό τρόπο σε κάθε σωλήνα. Έτσι το δυναμικό είναι μη μηδενικό μόνο όταν τα ηλεκτρόνια βρίσκονται εξολοκλήρου μέσα στον αγωγό περιοχές αλλά M1 και M2. Όταν τα ηλεκτρόνια βρίσκονται στην περιοχή II επίσης δεν υπάρχει δυναμικό. Ο σκοπός αυτής της διάταξης είναι να

εξασφαλίσει ότι το ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με ένα χρονικά μεταβαλλόμενο δυναμικό και όχι με τυχόν εξωτερικά πεδία. Το πεδίο μηδενίζεται στις περιοχές μακριά από τους σωλήνες και είναι μη μηδενικό μόνο όταν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στο εσωτερικό τους.

Η περίπτωση αυτού του πειράματος είναι όμοια με το κουτί Faraday μόνο που τώρα έχουμε δύο διαφορετικές κυματοσυναρτήσεις, τις $\psi_1^0(\vec{r}, t)$, $\psi_2^0(\vec{r}, t)$ μια για κάθε αγωγό και δυο διαφορετικά δυναμικά. Η λύση για το σύστημα των σωλήνων είναι

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t) = \psi_1^0(\vec{r}, t)e^{-iS_1(t)/\hbar} + \psi_2^0(\vec{r}, t)e^{-iS_2(t)/\hbar}$$

$$\text{όπου } S_1(t) = \int_0^t U_1(\tau) d\tau \text{ και } S_2(t) = \int_0^t U_2(\tau) d\tau$$

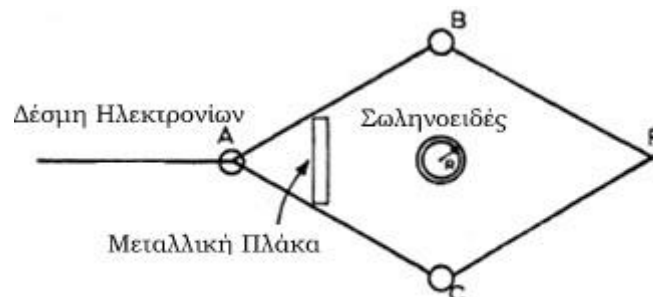
Η διαφορά φάσης δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{\hbar}(S_1 - S_2)(t) = \frac{q}{\hbar} \int_0^t V(\tau) d\tau = \frac{q}{\hbar} \int_0^t (V_1(\tau) - V_2(\tau)) d\tau$$

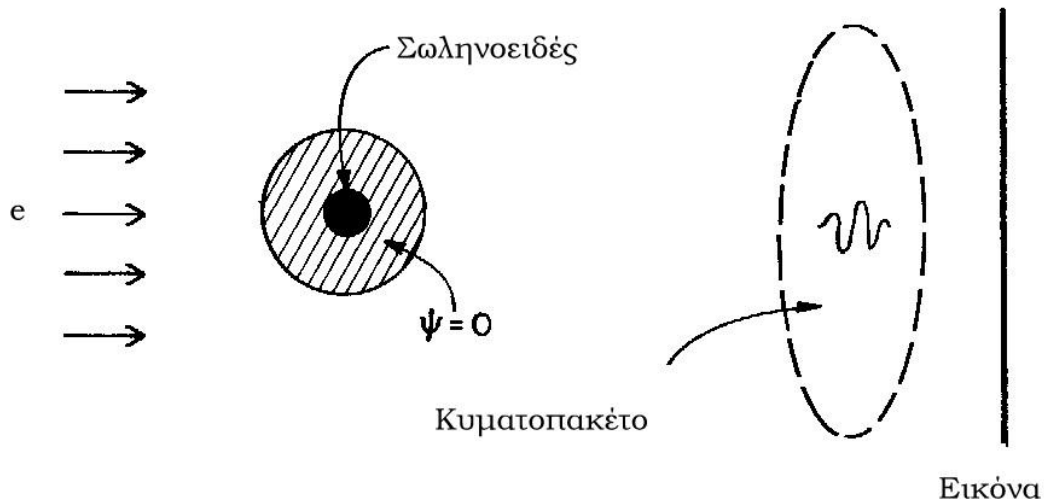
στο σημείο F όπου οι δύο δέσμες ξανασυναντιούνται. Άρα εμφανίζεται ένα φυσικό φαινόμενο που οφείλεται στην ύπαρξη των ηλεκτρικών δυναμικών στο εσωτερικό των σωλήνων και όχι σε κάποια δύναμη που ασκείται στα ηλεκτρόνια στον εξωτερικό χώρο όπου το πεδίο είναι μηδενικό. Το φαινόμενο είναι καθαρά κβαντομηχανικό αφού σχετίζεται με συμβολή. Οπότε δεν μας εκπλήσσει το γεγονός που παρόμοιο φαινόμενο δεν εμφανίζεται στην Κλασική Μηχανική.

Μαγνητικό φαινόμενο Bohm-Aharonov

Ας θεωρήσουμε το παρακάτω διαφορετικό πείραμα. Δημιουργούμε μαγνητικό πεδίο \vec{B} με τη βοήθεια ενός κυλινδρικού σωληνοειδούς (με πυκνές σπείρες) ακτίνας R και κέντρου που να ταυτίζεται με την αρχή του συστήματος συντεταγμένων Oxyz. Ο άξονας συμμετρίας του σωληνοειδούς είναι ο Oz και το πηνίο διαρρέεται από δεξιόστροφο ρεύμα σταθερής έντασης I. Το μαγνητικό πεδίο είναι τότε εντοπισμένο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς. Δέσμη ηλεκτρονίων πέφτει κάθετα στο μαγνητικό πεδίο και μετά διαχωρίζεται σε δύο υποδέσμες που διαδίδονται κοντά από τις απέναντι πλευρές του σωληνοειδούς. Για να προστατευθεί το σωληνοειδές χρησιμοποιούμε μεταλλικό φύλλο που τοποθετείται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης της αρχικής δέσμης. Οι υποδέσμες συναντιούνται στο σημείο F όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχ.(3.1.2) Το μαγνητικό πεδίο είναι εντοπισμένο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς κάθετο στην εικόνα που βλέπουμε. Η δέσμη ηλεκτρονίων κατευθύνεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο χωρίς να το διαπερνά και χωρίζεται σε δυο υποδέσμες στο σημείο A, οι οποίες συναντιούνται στο σημείο F.



Σχ.(3.1.3) Εικόνα συμβολής δέσμης ηλεκτρονίων που προσπίπτει σε μαγνητικό πεδίο που είναι εντοπισμένο στο εσωτερικό σωληνοειδούς.

Η μαγνητική ροή μέσα από μια κάθετη διατομή του σωληνοειδούς που παριστάνεται από μια τον κυκλικό δίσκο S με σύνορο $\partial S = C$, δίνεται από την

$$\Phi_0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (3.1.4)$$

όπου \vec{A} είναι το ανυσματικό δυναμικό. Στην τελευταία ισότητα της (3.1.4) χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα του Stokes. Μπορούμε πάντα να βρούμε μια λύση της εξίσωσης του Schrödinger με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \quad (3.1.5)$$

στις περιοχές όπου μηδενίζεται το μαγνητικό πεδίο, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{0}$, θέτοντας $\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) e^{-iS(\vec{r})/\hbar}$ με $\psi_0(\vec{r}, t)$ τη λύση που αντιστοιχεί στην ελεύθερη εξίσωση του Schrödinger, $\vec{A} = \vec{0}$, και με την επιπλέον συνθήκη ότι $\frac{\vec{\nabla} S}{\hbar} = -\frac{q}{c} \vec{A}$.

Στο πείραμα που συζητάμε ο χώρος μας είναι μη συνεκτικός και η λύση $\psi = \psi_0 e^{-iS(\vec{r})/\hbar}$ δεν είναι μονότιμη συνάρτηση (εκτός και αν $\Phi = \frac{n\hbar c}{q}$ όπου n ακέραιος αριθμός) οπότε μη αποδεκτή λύση της εξίσωσης του Schrödinger.

Στο πείραμά μας η κυματοσυνάρτηση δίνεται από την $\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$ και επειδή κάθε μία από τις δέσμες ηλεκτρονίων παραμένει σε απλά συνεκτικό χωρίο κατά τη διάρκεια του πειράματος μπορούμε να γράψουμε:

$$\psi_1(\vec{r}, t) = \psi_1^0(\vec{r}, t) e^{-iS_1(\vec{r})/\hbar} \quad \text{και} \quad \psi_2(\vec{r}, t) = \psi_2^0(\vec{r}, t) e^{-iS_2(\vec{r})/\hbar} \quad (3.1.6)$$

όπου $\psi_1^0(\vec{r}, t)$ και $\psi_2^0(\vec{r}, t)$ είναι οι λύσεις όταν δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο. Η διαφορά φάσης για το ηλεκτρικό φαινόμενο B-A είναι

$$\frac{1}{\hbar}(S_1 - S_2)(t) = \frac{q}{\hbar} \int_0^t (V_1(\tau) - V_2(\tau)) d\tau = \frac{q}{\hbar} \int_0^t V(\tau) d\tau. \quad (3.1.7)$$

Η προηγούμενη σχέση μπορεί να γενικευθεί, χρησιμοποιώντας το τετράνυσμα του δυναμικού $A^\mu = (\vec{A}, -V/c)$ με $dx^\nu = (d\vec{s}, cdt)$

$$\oint_C \eta_{\mu\nu} A^\mu dx^\nu = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{t_1}^{t_2} V dt \quad (3.1.8)$$

Η (3.1.8) έχει αποδειχθεί από τον Lenz ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς Lorenz. Για την ειδική περίπτωση που η τροχιά λαμβάνεται μια δεδομένη χρονική στιγμή η διαφορά φάσης γράφεται

$$S_1 = \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{s}, \quad S_2 = \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = -\frac{q}{c\hbar} \left(\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{s} \right) = -\frac{q}{c\hbar} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}. \quad (3.1.9)$$

Με τη βοήθεια της (3.1.4) η (3.1.8) λαμβάνει την ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{\Delta S}{\hbar} = -\frac{q}{c\hbar} \Phi. \quad (3.1.10)$$

Αρα η επίδραση του μαγνητικού πεδίου στη δέσμη των ηλεκτρονίων υπάρχει ακόμη και στις περιοχές εκείνες που μηδενίζεται.

3.2 Ακριβής λύση για το πρόβλημα της σκέδασης

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την ακριβή λύση της σκέδασης μιας δέσμης ηλεκτρονίων από ένα σταθερό μαγνητικό πεδίο με διεύθυνση κάθετη στην κίνηση της δέσμης. Το μαγνητικό πεδίο θα έχει τότε συνιστώσες $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Η Χαμιλτονιανή (δες Κεφάλαιο 1.2) στην περίπτωση αυτή γράφεται:

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q}{c} i\hbar (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) + \frac{q^2}{c^2} \vec{A} \cdot \vec{A} \right). \quad (3.2.1)$$

Το ανυσματικό δυναμικό (δες Παράρτημα Α.4) δίνεται από την :

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r^2} (-y, x, 0), \quad (3.2.2)$$

με Φ τη μαγνητική ροή διαμέσου της κάθετης διατομής του σωληνοειδούς. Σε πολικές συντεταγμένες το ανυσματικό δυναμικό (3.2.2) γράφεται

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r} (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0) \quad (3.2.3)$$

με τον περιορισμό

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (3.2.4)$$

Η Χαμιλτονιανή τότε ισοδύναμα γράφεται:

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} + 2 \frac{q}{c} i\hbar \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{q^2}{c^2} \vec{A} \cdot \vec{A} \right) \quad (3.2.5)$$

και ο δεύτερο όρος της (3.2.5) δίνεται από την

$$i\hbar \vec{A} \cdot \vec{\nabla} = -i\hbar \frac{\Phi}{2\pi r^2} (-y\partial_x, x\partial_y, 0) = -i\hbar \frac{\Phi}{2\pi r^2} \partial_\theta,$$

με $(-y\partial_x, x\partial_y)$ να παριστάνει τη στροφορμή του σωματιδίου που κινείται στο xy -επίπεδο (δες Παράρτημα Α.5 για την απόδειξη).

Τέλος θα χρειαστούμε και τον προσδιορισμό του τετραγώνου του μέτρου του ανυσματικού δυναμικού:

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{A} &= \frac{\Phi^2}{4\pi^2} \left(\frac{-\sin(\theta)}{r}, \frac{\cos(\theta)}{r}, 0 \right) \cdot \left(\frac{-\sin(\theta)}{r}, \frac{\cos(\theta)}{r}, 0 \right) \\ &= \frac{\Phi^2}{4\pi^2} \left(\frac{\sin^2(\theta)}{r^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2} \right) \\ &= \frac{\Phi^2}{4\pi^2 r^2}. \end{aligned}$$

Η Χαμιλτονιανή μετά την αντικατάσταση των προηγούμενων σχέσεων παίρνει την τελική μορφή σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\hbar^2 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - 2 \frac{q}{c} i\hbar \frac{\Phi}{2\pi r^2} \partial_\theta + \frac{q^2}{c^2} \frac{\Phi^2}{4\pi^2 r^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad (3.2.6)$$

Επειδή μελετάμε τη συμπεριφορά της κυματοσυνάρτησης σε δεδομένο z -επίπεδο, ο τελευταίος όρος της Λαπλασιανής που περιέχει τη δεύτερη μερική παράγωγο ως προς z παραλείπεται. Η χρονοεξαρτημένη κυματική εξίσωση του Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\psi(\vec{r}, t) \quad (3.2.7)$$

μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών. Δηλαδή θα αναζητήσουμε λύση της μορφής

$$\psi(\vec{r}, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t) \text{ με } R(r)T(t)\Theta(\theta) \neq 0$$

εάν υπάρχει. Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση ψ στην εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned}
i\hbar R(r)\Theta(\theta)\frac{dT(t)}{dt} &= T(t)H\Theta(\theta)R(r) \\
i\hbar\frac{1}{T(t)}\frac{dT(t)}{dt} &= \frac{1}{R(r)\Theta(\theta)}HR(r)\Theta(\theta) \\
&= -C^2 = E
\end{aligned}$$

όπου $E = E_{n,m}$ είναι οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής H , όπως θα διαπιστώσουμε σύντομα. Η συνάρτηση $T(t)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dT(t)}{dt} + \frac{iC^2}{\hbar}T(t) = 0$$

με γενική λύση την

$$T(t) = Ae^{-\frac{iC^2 t}{\hbar}} \quad (3.2.8)$$

όπου η αυθαίρετη σταθερά A θα απορροφηθεί στους συντελεστές $\alpha_{n,m}$ του αναπτύγματος της ψ , (δες σχέση (3.2.9)). Η γενική λύση της εξίσωσης του Schrödinger μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοσυναρτήσεων της Χαμιλτονιανής ως εξής

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{n,m} \alpha_{n,m} e^{\frac{iE_{n,m}t}{\hbar}} R_n(r)\Theta_m(\theta). \quad (3.2.9)$$

Η χρονοανεξάρτητη εξίσωση στην περιοχή που μηδενίζεται το μαγνητικό πεδίο δίνεται από την

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{q\Phi}{\hbar c} i \right)^2 \right] R(r)\Theta(\theta) &= -\varepsilon^2 R(r)\Theta(\theta) \Rightarrow \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha i \right)^2 \right] R(r)\Theta(\theta) &= -\varepsilon^2 R(r)\Theta(\theta)
\end{aligned}$$

$$\text{με } \varepsilon = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} E, \quad \alpha = -\frac{q\Phi}{\hbar c} \text{ και } \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Η μέθοδος των χωριζόμενων μεταβλητών, με $R(r)\Theta(\theta) \neq 0$, δίνει

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{R(r)} \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) + \frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\Theta''(\theta) + 2ia\Theta'(\theta) - \alpha^2 \Theta(\theta) \right) &= -r^2 \varepsilon^2 \Leftrightarrow \\
\frac{r^2}{R(r)} \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) + r^2 \varepsilon^2 &= -\frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\Theta''(\theta) + 2ia\Theta'(\theta) - \alpha^2 \Theta(\theta) \right).
\end{aligned}$$

Η προηγούμενη ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο εάν υπάρχει σταθερά λ τέτοια ώστε

$$\frac{r^2}{R(r)} \left(R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right) + r^2 \varepsilon^2 = \lambda = -\frac{1}{\Theta(\theta)} \left(\Theta''(\theta) + 2ia\Theta'(\theta) - \alpha^2 \Theta(\theta) \right).$$

Αρχικά θα επιλύσουμε τη συνήθη, δευτεροτάξια, γραμμική, ομογενή και με σταθερούς συντελεστές διαφορική εξίσωση ως προς $\Theta(\theta)$, με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς λ . Στη συνέχεια θα επιλύσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς $R(r)$.

Έχουμε ότι:

$$-\frac{1}{\Theta(\theta)}\left(\Theta''(\theta) + 2ia\Theta'(\theta) - \alpha^2\Theta(\theta)\right) = \lambda \Rightarrow \quad (3.2.10)$$

$$\Theta''(\theta) + 2ia\Theta'(\theta) + (\lambda - \alpha^2)\Theta(\theta) = 0.$$

Η κάθετη στο επίπεδο της κίνησης τροχιακή στροφορμή παριστάνεται από ένα αυτοσυζυγή τελεστή με πραγματικές ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση

$$L_z |\Theta(\theta)\rangle = m |\Theta(\theta)\rangle, \quad m \in \mathbb{Z}$$

ή ισοδύναμα

$$-i\hbar \frac{\partial \Theta(\theta)}{\partial \theta} = m\Theta(\theta) \Rightarrow \Theta(\theta) = e^{\frac{im}{\hbar}\theta}$$

Άρα η αρχική διαφορική εξίσωση θα έχει λύσεις της μορφής $\Theta(\theta) = e^{\rho\theta}$ με ρ να ικανοποιεί τη δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\rho^2 + 2ia\rho + \lambda - \alpha^2 = 0.$$

Για $\rho = im$, επιλύοντας ως προς λ , έχουμε

$$\lambda = -(\rho + ia)^2 = -(im + ia)^2 = (m + a)^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Αντικαθιστώντας την προηγούμενη τιμή του λ στη διαφορική εξίσωση της $R(r)$ έχουμε

$$\frac{r^2}{R(r)}\left(R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)\right) + r^2\varepsilon^2 = \lambda = (m + a)^2 \Leftrightarrow \quad (3.2.11)$$

$$r^2R''(r) + rR'(r) + \left(r^2\varepsilon^2 - (m + a)^2\right)R(r) = 0.$$

Αλλάζοντας μεταβλητή, $u = \varepsilon r$, οι παράγωγοι της R ως προς r μετασχηματίζονται, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, στις

$$\frac{dR(r)}{dr} = \frac{dR(u)}{du} \varepsilon = \frac{u}{r} \frac{dR(u)}{du}$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2} = \varepsilon^2 \frac{d^2R(u)}{du^2} = \left(\frac{u}{r}\right)^2 \frac{d^2R(u)}{du^2}.$$

Μετά από αντικατάσταση παίρνουμε:

$$R''(u) + \frac{1}{u}R'(u) + \left(1 - \frac{(m + a)^2}{u^2}\right)R(u) = 0. \quad (3.2.12)$$

Αυτή είναι η εξίσωση Bessel τάξεως $(m+a)$ (δες Παράρτημα A.7 για περισσότερες λεπτομέρειες) που έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις τις $J_{m+a}, J_{-(m+a)}$ με την προϋπόθεση ότι το $(m+a)$ δεν είναι ακέραιος αριθμός. Η γενική λύση τότε γράφεται

$$\tilde{\psi}(\vec{r}) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{im\theta} (a_m J_{m+a}(\epsilon r) + b_m J_{-m-a}(\epsilon r)) \quad (3.2.13)$$

όπου a_m και b_m αυθαίρετες σταθερές. Η (3.2.13) ισχύει μόνο για την περιοχή όπου $r > R$. Στην περιοχή $r \leq R$ μόνο η J_{m+a} είναι αποδεκτή αφού θα πρέπει να έχει πεπερασμένο όριο για $r \rightarrow 0^+$. Πράγματι,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} J_\nu(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{r}{2} \right)^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{r}{2} \right)^{2l}}{l! \Gamma(\nu + l + 1)} \right) = 0, \nu = m + a$$

ενώ η $J_{-(m+a)}$ απειρίζεται στο ίδιο όριο

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} J_{-\nu}(r) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{r}{2} \right)^{-\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{r}{2} \right)^{2l}}{l! \Gamma(\nu + l + 1)} \right) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{2^\nu}{r^\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \left(\frac{r}{2} \right)^{2l}}{l! \Gamma(\nu + l + 1)} \right) = \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα $P(\vec{r} \in \text{κυκλικό δίσκο}) = \int_0^{2\pi} \int_0^R |\psi(\vec{r})|^2 r dr d\theta$ το σωματίδιο να βρεθεί στην περιοχή που το μαγνητικό πεδίο δεν μηδενίζεται τείνει στο μηδέν όταν $r \rightarrow R$. Επομένως η κυματοσυνάρτηση δεν θα επηρεαστεί εάν το ηλεκτρόνιο βρίσκεται μακριά από το μαγνητικό πεδίο με τη χρήση ενός φράγματος του οποίου η ακτίνα τείνει στο μηδέν.

Η γενική λύση όταν $R \rightarrow 0$ είναι:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\theta} J_{|m+a|} \quad (3.2.14)$$

Πρέπει τώρα να επιλέξουμε τους συντελεστές a_m του αναπτύγματος έτσι ώστε η $\psi(\vec{r}, t)$ να αντιπροσωπεύει μια δέσμη ηλεκτρονίων που προσπίπτει από τα δεξιά ($\theta = 0$) και να ικανοποιεί την αρχική απαίτηση ότι η πυκνότητα του ρεύματος πιθανότητας είναι σταθερή κατά μέτρο και διεύθυνση. Για απλότητα θα συμβολίσουμε με $\psi := \psi(\vec{r})$. Η πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας δίνεται από τη σχέση δες Παράρτημα (A.2) :

$$\vec{j} = \frac{\hbar(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)}{2im} - \frac{q}{mc} \vec{A} \psi^* \psi. \quad (3.2.15)$$

Στην περίπτωση μας είναι εύκολο να δούμε ότι η συνάρτηση για το προσπίπτον κύμα είναι: $\psi_{\text{προσπ}} = e^{-i\epsilon x} e^{-ia\theta}$. Θα δείξουμε ότι η επιλογή $a_m = (-i)^{|m+a|}$ στην (3.2.14) ικανοποιεί τη διατήρηση της πυκνότητας ρεύματος πιθανότητας, δηλαδή ότι ισχύει $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. Η λύση τότε θα πάρει τη μορφή:

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^{|m+a|} J_{|m+a|} e^{im\theta}. \quad (3.2.16)$$

Για απλοποίηση των υπολογισμών χωρίζουμε τη ψ σε τρεις όρους $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ όπου

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m+a} J_{m+a} e^{im\theta} \\ \psi_2 &= \sum_{m=-\infty}^{-1} (-i)^{m+a} J_{m+a} e^{im\theta} = \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m-a} J_{m-a} e^{-im\theta} \\ \psi_3 &= (-i)^{|a|} J_{|a|}\end{aligned}$$

Τώρα παρατηρούμε ότι η ψ_1 ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial r'} &= \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m+a} J_{m+a}' e^{im\theta} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m+a} \frac{(J_{m+a-1} - J_{m+a+1}) e^{im\theta}}{2}, \quad r' = \varepsilon r.\end{aligned}\tag{3.2.17}$$

Στην (3.2.17) χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\frac{dJ_{\gamma}(r)}{dr} = \frac{J_{\gamma-1} - J_{\gamma+1}}{2}\tag{3.2.18}$$

η οποία αποδεικνύεται στο Παράρτημα (Α.7). Στη συνέχεια η (3.2.17) γράφεται

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_1}{\partial r'} &= \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^{\infty} (-i)^{m'+a+1} J_{m'+a} e^{i(m'+1)\theta} - \frac{1}{2} \sum_{m'=2}^{\infty} (-i)^{m'+a-1} J_{m'+a} e^{i(m'-1)\theta} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m'=1}^{\infty} (-i)^{m'+a} J_{m'+a} e^{im'\theta} (-ie^{i\theta} + i^{-1}e^{-i\theta}) + \frac{1}{2} (-i)^a [J_{a+1} - ie^{i\theta} J_a]\end{aligned}\tag{3.2.19}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r'} = -i \cos(\theta) \psi_1 + \frac{1}{2} (-i)^a (J_{a+1} - iJ_a e^{i\theta}).\tag{3.2.20}$$

Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση (3.2.20) έχουμε

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \tilde{A} \int_0^{r'} e^{ir' \cos(\theta)} (J_{a+1} - iJ_a e^{i\theta}) dr' \\ \tilde{A} &= \frac{1}{2} (-i)^a e^{-ir' \cos(\theta)}.\end{aligned}\tag{3.2.21}$$

Το κατώτερο όριο της ολοκλήρωσης καθορίζεται από την απαίτηση ότι καθώς το r' τείνει στο 0 η ψ_1 τείνει επίσης στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει γιατί η ψ_1 περιέχει συναρτήσεις Bessel μόνο θετικών όρων.

3.3

Ασυμπτωτική συμπεριφορά

Για να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ψ_1 τη γράψουμε αρχικά ως:
 $\psi_1 = \tilde{A}(I_1 - I_2)$ όπου

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty e^{ir' \cos(\theta)} (J_{a+1} - iJ_a e^{i\theta}) dr', \\ I_2 &= \int_r^\infty e^{ir' \cos(\theta)} (J_{a+1} - iJ_a e^{i\theta}) dr'. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Το πρώτο από αυτά τα ολοκληρώματα μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο:

$$\int_0^\infty e^{i\beta r} J_a(kr) dr = \frac{e^{i\alpha \arcsin(\beta/k)}}{(k^2 - \beta^2)^{1/2}}, \quad 0 < \beta < k, -2 < \alpha. \quad (3.3.2)$$

Στην περίπτωση μας αντικαθιστώντας με $\beta = \cos(\theta)$ και $k=1$ έχουμε ότι

$$I_1 = \left[\frac{e^{i(a+1)(\frac{1}{2}\pi - |\theta|)}}{|\sin(\theta)|} - i e^{i\theta} \frac{e^{i a(\frac{1}{2}\pi - |\theta|)}}{|\sin(\theta)|} \right]. \quad (3.3.3)$$

Επειδή η (3.3.3) είναι άρτια συνάρτηση ως προς θ μπορούμε να την εκφράσουμε συναρτήσει των $|\theta|$ και $|\sin(\theta)|$. Ως εκ τούτου, έχουμε

$$\begin{aligned} I_1(\theta) &= e^{i a(\frac{1}{2}\pi - |\theta|)} \left[\frac{i e^{-i|\theta|} - i e^{i\theta}}{|\sin(\theta)|} \right] \Rightarrow \\ I_1(\theta) &= \begin{cases} 0, & \theta < 0 \\ e^{ia\theta} 2i^a, & \theta > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

όπου το $-\pi < \theta < \pi$.

Θα διαπιστώσουμε ότι η $I_1(\theta)$ αποτελεί την κύρια συνεισφορά στην ασυμπτωτική έκφραση της ψ_1 . Επειδή η $I_1(\theta)$ μηδενίζεται όταν η $\theta < 0$ συμπεραίνουμε ότι αυτό το κομμάτι της ψ_1 ασυμπτωτικά διέρχεται μόνο από το πάνω μέρος της περιοχής που εφαρμόζεται το μαγνητικό πεδίο. Για να το εξηγήσουμε αυτό σημειώνουμε ότι η ψ_1 περιέχει μόνο θετικούς όρους του m και ως εκ τούτου της στροφορμής. Είναι απολύτως φυσικό λοιπόν αυτό το κομμάτι της ψ_1 να περιγράφει τροχιά που διέρχεται από το πάνω μέρος της περιοχής όπου είναι εντοπισμένο το μαγνητικό πεδίο.

Όμοια επειδή $\psi_2(r', \theta, \alpha) = \psi_1(r', -\theta, -\alpha)$ συνεπάγεται ότι η ψ_2 αντιπροσωπεύει ένα αντίθετο κύμα της ψ_1 , οπότε και οι δυο μαζί δημιουργούν το κατάλληλο προσπίπτον κύμα.

Στην περίπτωση που το $r' \rightarrow \infty$ μπορούμε να λάβουμε, για την ολοκληρωτέα συνάρτηση της I_2 , τον πρώτο ασυμπτωτικό όρο της J_a , δηλαδή,

$$J_a \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi r'}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(r' - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\pi\right). \quad (3.3.5)$$

Οπότε έχουμε $I_2 = \int_r^\infty e^{ir'\cos(\theta)} (J_{a+1} - iJ_a e^{i\theta}) dr' \rightarrow C + D$ όπου

$$C = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_r^\infty \frac{e^{ir'\cos(\theta)}}{(r')^{\frac{1}{2}}} \left[\cos\left(r' - \frac{1}{2}(a+1)\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \right] dr',$$

$$D = \int_r^\infty e^{ir'\cos(\theta)} \left[\cos\left(r' - \frac{1}{2}a - \frac{1}{4}\pi\right) \right] \frac{dr'}{(r')^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (-i)e^{i\theta}$$
(3.3.6)

Τότε

$$C = \int_r^\infty e^{ir'\cos(\theta)} \left[e^{i\left[r' - \frac{1}{2}(a+1)\pi - \frac{1}{4}\pi\right]} + e^{-i\left[r' - \frac{1}{2}(a+1)\pi - \frac{1}{4}\pi\right]} \right] \frac{dr'}{(2\pi r')^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(-i)^{a+\frac{3}{2}}}{(1+\cos(\theta))^{\frac{1}{2}}} \int_{[r'(1+\cos(\theta))]^{\frac{1}{2}}}^\infty e^{iz^2} dz + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{i^{a+\frac{3}{2}}}{(1-\cos(\theta))^{\frac{1}{2}}} \int_{[r'(1-\cos(\theta))]^{\frac{1}{2}}}^\infty e^{-iz^2} dz$$
(3.3.7)

όπου θέσαμε $z = [r'(1+\cos(\theta))]^{\frac{1}{2}}$, $z = [r'(1-\cos(\theta))]^{\frac{1}{2}}$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης λάθους (δες Παράρτημα Α.8) έχουμε

$$\int_\alpha^\infty e^{iz^2} dz \rightarrow \frac{ie^{ia^2}}{2a}, \quad \int_\alpha^\infty e^{-iz^2} dz \rightarrow \frac{-ie^{-ia^2}}{2a}.$$

Άρα

$$C = \left[\frac{(-i)^{a+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{ir'}}{[r'(1+\cos(\theta))^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{i^{a+\frac{1}{2}} e^{-ir'}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} [r'(1-\cos(\theta))^2]^{\frac{1}{2}}} \right] e^{ir'\cos(\theta)}$$

$$D = \left[\frac{(-i)^{a-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{ir'}}{[r'(1+\cos(\theta))^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{i^{a-\frac{1}{2}} e^{-ir'}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}} [r'(1-\cos(\theta))^2]^{\frac{1}{2}}} \right] e^{ir'\cos(\theta)} (-i)e^{i\theta}$$
(3.3.8)

Προσθέτοντας τις (3.3.8) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.3.1) και (3.3.6), βρίσκουμε ότι ο όρος $\frac{1}{(r')^{\frac{1}{2}}}$, στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της ψ_1 , δίνεται από την

$$\frac{(-i)^{1/2}}{2(2\pi)^{1/2}} \left[(-1)^\alpha \frac{e^{ir'}(1+e^{i\theta})}{(r')^{1/2}(1+\cos(\theta))} + i \frac{e^{-ir'}(1-e^{i\theta})}{(r')(1-\cos(\theta))} \right]. \quad (3.3.9)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\psi_2(r', \theta, \alpha) = \psi_1(r', -\theta, -\alpha)$ μπορούμε να βρούμε τον αντίστοιχο όρο της ψ_2 να είναι

$$\frac{(-i)^{1/2}}{2(2\pi)^{1/2}} \left[(-1)^{-\alpha} \frac{e^{ir'}(1+e^{-i\theta})}{(r')^{1/2}(1+\cos(\theta))} + i \frac{e^{-ir'}(1-e^{-i\theta})}{(r')(1-\cos(\theta))} \right]. \quad (3.3.10)$$

Αντικαθιστώντας τις (3.3.9) και (3.3.10) στην $I_1(\theta)$ έχουμε ότι :

$$\psi_1 + \psi_2 \rightarrow \frac{(-i)^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{ie^{-ir'}}{(r')^{1/2}} + \frac{e^{ir'} \cos\left(\pi\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{(r')^{1/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right] + e^{-i(r' \cos(\theta) + \alpha\theta)} \quad (3.3.11)$$

Απομένει να μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της ψ_3 και να υπολογίσουμε έτσι τη συνεισφορά της στην ψ . Χρησιμοποιώντας την (3.3.5) έχουμε

$$(-i)^{|a|} J_{|a|}(r') \rightarrow (-i)^{|a|} \left(\frac{2}{\pi r'} \right)^{1/2} \cos\left(r' - \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}|a|\pi\right) \quad (3.3.12)$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις συνεισφορές μαζί έχουμε :

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 \xrightarrow{r' \rightarrow \infty} e^{-i(a\theta + r' \cos(\theta))} + \frac{e^{ir'}}{(2\pi ir')^{1/2}} \sin(\pi\alpha) \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad (3.3.13)$$

όπου το $+, -$ επιλέγεται ανάλογα με το πρόσημο της a . Ο πρώτος όρος της (3.3.13) αντιπροσωπεύει το προσπίπτον κύμα ενώ ο δεύτερος το σκεδαζόμενο κύμα. Η σκεδαζόμενη κάθετη διατομή είναι (δες Παράρτημα Α.9)

$$\sigma = \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \quad (3.3.14)$$

Όταν $a = n$, όπου το n ακέραιος αριθμός, τότε η σ μηδενίζεται. Η ασυμπτωτική σχέση (3.3.13) ισχύει μόνο στην περίπτωση που δεν βρισκόμαστε στην ευθεία $\theta = \pi$. Η λύση όταν βρισκόμαστε στην ευθεία $\theta = \pi$ δίνεται από ένα συνδυασμό του πρώτου με τον δεύτερο όρο έτσι ώστε να δημιουργηθεί μια μονότιμη κυματική συνάρτηση παρόλο που κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στη περιοχή της ευθείας αυτής. Αυτό θα το δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια στην ειδική περίπτωση που $a = n + 1/2$. Παρόλο αυτά σε αυτό το πρόβλημα είναι αρκετό να

χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο όρο της εξίσωσης (3.3.13). Εδώ βλέπουμε ότι η φάση της κυματοσυνάρτησης έχει διαφορετική τιμή ανάλογα με τη γωνία $\theta = +\pi, -\pi$. Θα συζητήσουμε τώρα δύο ειδικές περιπτώσεις που μπορούν να επιλυθούν ακριβώς.

Η πρώτη είναι η περίπτωση όπου το $\alpha = n$. Η κυματοσυνάρτηση σ' αυτή την περίπτωση δίνεται από την $\psi_{\text{προσπ.}} = e^{-i\epsilon x} e^{-ia\theta}$ και είναι προφανώς μονότιμη συνάρτηση για $\alpha = n$ με n ακέραιο αριθμό. Με παραγωγή εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτή είναι μια λύση της (3.2.12). Η δεύτερη περίπτωση αντιστοιχεί στην τιμή $\alpha = n + \frac{1}{2}$. Επειδή η $J_{(n+\frac{1}{2})}(r)$ είναι τριγωνομετρική συνάρτηση τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στη ψ υπολογίζονται αναλυτικά και το αποτέλεσμα είναι

$$\psi = \frac{i^{1/2} e^{-i(\frac{1}{2}\theta + r' \cos(\theta))} [r'(1 + \cos(\theta))]^{1/2}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{iz^2} dz. \quad (3.3.15)$$

Αυτή η συνάρτηση καταρρέει για $\theta = \pi$ αφού το άνω όριο του ολοκληρώματος μηδενίζεται. Η ασυμπτωτική της συμπεριφορά είναι ίδια με της (3.2.13) για $\alpha = n + \frac{1}{2}$.

3.4 Η σημασία των αποτελεσμάτων μας

Το κεντρικό συμπέρασμα της προηγούμενης μελέτης είναι ότι στην Κβαντική θεωρία ένα φορτισμένο σωματίδιο, για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο, επηρεάζεται από τα ανυσματικά δυναμικά ακόμη και όταν τα μαγνητικά πεδία απουσιάζουν από κάποια περιοχή του χώρου. Με άλλα λόγια, σε ένα πολλαπλά συνεκτικό χωρίο στο οποίο απουσιάζουν τα μαγνητικά πεδία, οι φυσικές ιδιότητες του συστήματος εξαρτώνται άμεσα από τα ανυσματικά δυναμικά. Τα αποτελέσματά μας εκφράζονται συναρτήσει της ροής του μαγνητικού πεδίου μέσα από την ανοιχτή επιφάνεια S ή της κυκλοφορίας του ανυσματικού δυναμικού κατά μήκος της κλειστής τροχιάς που διαγράφει το ηλεκτρόνιο, βάσει της σχέσης: $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s}$.

Ωστόσο, σύμφωνα με τις πρόσφατες σχετικιστικές αντιλήψεις, όλα τα πεδία πρέπει να αλληλοεπιδρούν μόνο σε τοπικό επίπεδο. Δεδομένου ότι τα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να προσεγγίσουν τις περιοχές όπου βρίσκονται τα πεδία, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα φαινόμενα αυτά οφείλονται αποκλειστικά και μόνο στα δυναμικά.

Στην Κλασική Μηχανική υπενθυμίζουμε ότι τα ανυσματικά δυναμικά δεν παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο γιατί η εξίσωση της κίνησης περιέχει μόνο ποσότητες που σχετίζονται με πεδία. Αυτός είναι ο κύριος λόγος που τα ανυσματικά δυναμικά συνιστούν καθαρά μαθηματικά εργαλεία ενώ τα πεδία έχουν φυσικό χαρακτήρα. Στην Κβαντική Μηχανική, η βασική διαφορά είναι ότι η εξίσωση της κίνησης ενός σωματιδίου αντικαθίσταται από την εξίσωση του Schrödinger για ένα κύμα. Η εξίσωση του Schrödinger κατασκευάζεται με εφαρμογή του κανονικού φορμαλισμού και δεν εκφράζεται συναρτήσει των πεδίων αλλά απαιτεί την παρουσία των ανυσματικών δυναμικών. Πράγματι, τα δυναμικά παίζουν σημαντικό ρόλο στην εξίσωση του Schrödinger και είναι παρόμοια με εκείνη του δείκτη διάθλασης στην Οπτική. Η δύναμη Lorentz δεν εμφανίζεται στη θεμελιώδη θεωρία, αλλά εμφανίζεται σαν μια προσέγγιση που ισχύει μόνο στο κλασικό όριο. Είναι φυσικό σε αυτό το σημείο να προτείνουμε ότι στην Κβαντική Μηχανική οι θεμελιώδεις φυσικές οντότητες είναι τα δυναμικά, ενώ τα πεδία παράγονται από αυτά με παραγωγίσεις.

Η κύρια ένσταση που θα μπορούσε να διατυπωθεί ενάντια στην παραπάνω πρόταση στηρίζεται στην αναλλοίωτη θεωρία βαθμίδας. Σύμφωνα με αυτή εάν τα ανυσματικά πεδία

υπόκεινται στο μετασχηματισμό $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}$, όπου f είναι μια συνεχής βαθμωτή

συνάρτηση, τότε όλες οι γνωστές φυσικές ποσότητες παραμένουν αμετάβλητες.

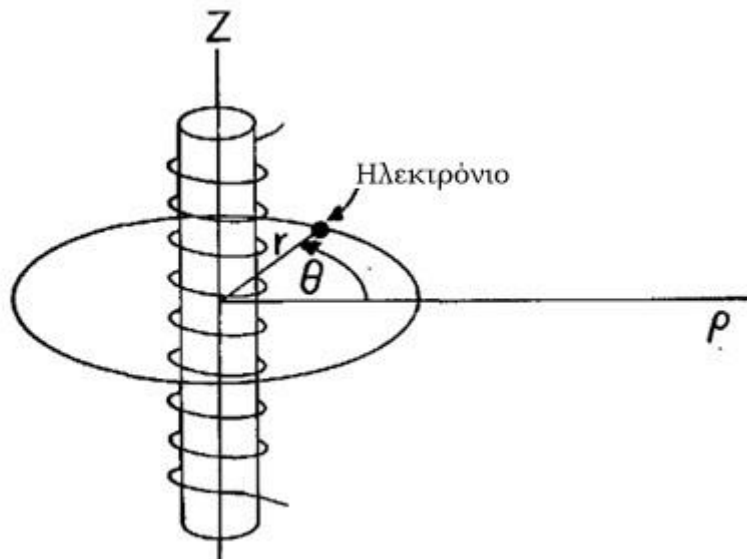
Παρόλο που τα ανυσματικά δυναμικά είναι πλουσιότερα σε ιδιότητες συγκριτικά με τα ανυσματικά πεδία, δεν υπάρχει τρόπος να αποκαλύψουμε αυτό τον “πλούτο”.

Ως εκ τούτου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα ανυσματικά δυναμικά δεν έχουν και πολύ νόημα αλλά χρησιμοποιούνται στο μαθηματικό υπολογισμό των πεδίων. Στην παρούσα εργασία είδαμε ότι αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση. Φυσικά η περιγραφή μας δεν θέτει σε αμφισβήτηση την αναλλοιότητα της θεωρίας κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Σε μια θεωρία που περιέχει μόνο τοπικές αλληλεπιδράσεις (για παράδειγμα στην εξίσωση του Schrödinger η του Dirac, όπως επίσης και στις κβαντομηχανικές θεωρίες πεδίου) τα ανυσματικά δυναμικά σε συγκεκριμένες περιπτώσεις πρέπει να θεωρούνται ως ποσότητες που μπορούν να επηρεάσουν το αποτέλεσμα, ακόμη και όταν δεν υπάρχουν πεδία που επιδρούν σε φορτισμένα σωματίδια.

3.5 Μια απλή περίπτωση του φαινομένου Bhom-Aharonov στις δυο διαστάσεις

Η πιο απλή περίπτωση του φαινομένου B-A που εμφανίζει όλα εκείνα τα χαρακτηριστικά που θέλουμε να επιβεβαιώσουμε, είναι αυτή της κίνησης ενός φορτισμένου σωματίου σε μια τροχιά γύρω από ένα σωληνοειδές πηνίο.

Φανταστείτε ένα φορτισμένο σωματίο να κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r γύρω από ένα σωληνοειδές πηνίο ακτίνας μικρότερης της τροχιάς του σωματιδίου. Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς έχει δημιουργηθεί μαγνητικό πεδίο \vec{B} το οποίο είναι κάθετο στο xy -επίπεδο και παράλληλο στον άξονα z . Η κίνηση πραγματοποιείται πάνω σε αυτό το επίπεδο, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Σχ.(3.1.4) Διάταξη πειράματος

Στην περίπτωση που $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ γνωρίζουμε ότι σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\vec{A} = (A_\rho, A_\theta, A_z)$$

$$\text{με } A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi r}, \quad A_z = A_\rho = 0 \quad (3.5.1)$$

Η Χαμιλτονιανή για το σωματίδιο μάζας m δίνεται από τη σχέση: (2.2.3) με r σταθερό

$$H = \frac{1}{2mr^2} \left(L_z + r \frac{q}{c} A_\theta \right)^2 = \frac{1}{2mr^2} \left(L_z + \frac{q\Phi}{2\pi c} \right)^2 \quad (3.5.2)$$

όπου $L_z \Theta(\theta) = l\hbar \Theta(\theta)$ είναι ο τελεστής της στροφορμής του φορτισμένου σωματιδίου και το l είναι ακέραιος αριθμός.

Η ιδιοκατάσταση της στροφορμής είναι:

$$\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\theta} \quad (3.5.3)$$

Οι ενεργειακές στάθμες E_l δίνονται από την

$$E_l = \frac{1}{2mr^2} \left(l\hbar + \frac{q\Phi}{2\pi c} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2 \quad (3.5.4)$$

ενώ η στροφορμή δίνεται από την σχέση

$$K_z = mr^2 \dot{\theta} = \left(L_z + \frac{q\Phi}{2\pi c} \right) = \hbar \left(l + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right). \quad (3.5.5)$$

Επιπλέον η Χαμιλτονιανή περιέχει την στροφορμή αφού,

$$H = \frac{1}{2mr^2} \left(L_z + \frac{q\Phi}{2\pi c} \right)^2 = \frac{1}{2mr^2} K_z^2 \quad (3.5.6)$$

Οι σχέσεις αυτές ξεκάθαρα φανερώνουν την εξάρτηση του ενεργειακού φάσματος και της κινητικής τροχιακής στροφορμής από τη ροή και από το ενεργειακό φάσμα E_l . Και τα δύο φάσματα είναι περιοδικά με περίοδο: $\Phi_0 = 2\pi c\hbar/q$ αφού εάν θέσουμε στην θέση της $\Phi \rightarrow \Phi + \Phi_0$ στην (3.5.4) έχουμε

$$E_{l+1} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(l+1 + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2$$

άρα

$$E_{l+1} = E_l(\Phi + \Phi_0).$$

Παράρτημα A.4

Απόδειξη της σχέσης: $\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r^2}(-y, x, 0)$

Απαιτώντας το μαγνητικό πεδίο να έχει συνιστώσες $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, με B_z σταθερό, και γνωρίζοντας ότι $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ με $\vec{B} = \vec{0}$, στο εξωτερικό του σωληνοειδούς, έχουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες ότι

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{e}_x - (\partial_x A_z - \partial_z A_x) \hat{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{e}_z = \vec{0} \Rightarrow$$

(A.4.1)

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \partial_y A_z - \partial_z A_y &= 0 \\ -\partial_x A_z + \partial_z A_x &= 0 \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x &= B_z \end{aligned}$$

(A.4.2)

Υποθέτοντας ότι $A_z = A_z(z)$, οι δύο πρώτες διαφορικές εξισώσεις ικανοποιούνται για $A_x = A_x(x, y)$ και $A_y = A_y(x, y)$. Άρα το ανυσματικό μας δυναμικό έχει τη γενική μορφή

$$\vec{A} = (A_x(x, y), A_y(x, y), A_z(z))$$

(A.4.3)

Από την απαίτηση

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \Leftrightarrow \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z = 0 \Rightarrow$$

$$-\partial_z A_z = \partial_x A_x + \partial_y A_y$$

(A.4.4)

και η προηγούμενη σχέση ισχύει μόνο όταν

$$\begin{aligned} -\partial_z A_z &= C \Rightarrow \\ A_z &= -Cz + D \end{aligned}$$

(A.4.5)

όπου C, D αυθαίρετες σταθερές.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i) $C = 0, D \neq 0$. Ένα δυνατό σύνολο λύσεων είναι

$$\begin{aligned} A_x &= \pm y \\ A_y &= \pm x \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z$ θα αποκλείσουμε κάποιο σύνολο λύσεων.

1^η Για $\vec{A} = (y, x, D)$ η σχέση $\partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z$ δίνει $B_z = 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι $B_z \neq 0$.

2^η Για $\vec{A} = (-y, -x, D)$ καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα όπως προηγουμένως.

3^η Για $\vec{A} = (y, -x, D)$ έχουμε ότι $\partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z = -2$ το οποίο είναι άτοπο αφού έχουμε υποθέσει ότι το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται προς την θετική κατεύθυνση του άξονα z.

4^η Για $\vec{A} = (-y, x, D)$ έχουμε ότι $\partial_x A_y - \partial_y A_x = B_z = 2$ και αυτή η αποδεκτή λύση.

ii) $C \neq 0$. Ακολουθώντας παρόμοιο συλλογισμό με την περίπτωση i) καταλήγουμε στο ανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A}' = \left(-y + \frac{C}{2}x, x + \frac{C}{2}y, -Cz + D \right) \quad (\text{A.4.6})$$

Παρατηρήσεις

- 1) Θα μπορούσε κάποιος να θεωρήσει για την περίπτωση i) το γενικό ανυσματικό δυναμικό

$$\vec{A} = (-ay, bx, D), \quad a, b > 0 \quad (\text{A.4.7})$$

το οποίο επαληθεύει όλες τις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις με $B_z = a + b$.

- 2) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό βαθμίδας με

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} \left(\frac{C}{2}(x^2 + y^2) + (Cz + D)^2 \right) \quad (\text{A.4.8})$$

παρατηρούμε ότι το $\vec{A}'(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) + \vec{\nabla}V(x, y, z)$. Επειδή οι πραγματικές σταθερές C, D είναι αυθαίρετες θα έχουμε μια άπειρη διαπαραμετρική οικογένεια μετασχηματισμών βαθμίδας που δίνονται από τις συναρτήσεις $V(x, y, z; C, D)$.

Η ροή του μαγνητικού πεδίου μέσα από μια ανοικτή επιφάνεια κάθετη στον άξονα z του σωληνοειδούς με $S \cap \bar{\Omega} \neq \emptyset$ (Ω το χωρίο του σωληνοειδούς) είναι

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \\ &= \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \\ &= \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \\ &= \oint_C (-y, x, 0) \cdot (dx, dy, dz) = \\ &= \oint_C -ydx + xdy \end{aligned} \quad (\text{A.4.9})$$

Με αλλαγή συντεταγμένων σε πολικές συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} dx &= -r \sin(\theta) d\theta + \cos(\theta) dr \\ dy &= r \cos(\theta) d\theta + \sin(\theta) dr \end{aligned} \quad (\text{A.4.10})$$

Οπότε με αντικατάσταση και ολοκληρώνοντας ως προς θ παίρνουμε

$$\oint_C -ydx + xdy = \oint_C (r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta))d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r^2 \Rightarrow \quad (\text{A.4.11})$$

$$\Phi = 2\pi r^2$$

Το ανυσματικό δυναμικό γράφεται ισοδύναμα

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi r^2}(-y, x, 0) \quad (\text{A.4.12})$$

Αν θέσουμε $\Phi = 2\pi r^2$ το ανυσματικό δυναμικό γράφεται $\vec{A} = (-y, x, 0)$.

Παράρτημα A.5

Απόδειξη ότι η στροφορμή σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από τον τελεστή $-y\partial_x + x\partial_y$.

Από το γραμμικό μετασχηματισμό που συνδέει τις καρτεσιανές συντεταγμένες με τις πολικές έχουμε

$$x = r \cos(\theta) \text{ και } y = r \sin(\theta)$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

και η στροφορμή μετασχηματίζεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες στην

$$\partial_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \partial_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \partial_y = -r \sin(\theta) \partial_x + r \cos(\theta) \partial_y = -y \partial_x + x \partial_y. \quad (\text{A.5.1})$$

Παράρτημα A.6

Στο παράρτημα αυτό αποδεικνύουμε τη σχέση μεταξύ της φάσης S και του ανυσματικού δυναμικού, δηλαδή ότι

$$-\vec{\nabla} S = \frac{q}{c} \vec{A} \quad (\text{A.6.1})$$

Γνωρίζουμε ότι η ψ δίνεται από την

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_0(\vec{x}, t) e^{-iS(\vec{x})/\hbar} \quad (\text{A.6.2})$$

όπου $\psi_0(\vec{x}, t)$ είναι η λύση της ελεύθερης εξίσωσης του Schrödinger

$$i\hbar \partial_t \psi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_0. \quad (\text{A.6.3})$$

Λύνοντας την (A.3.2) ως προς $\psi_0(\vec{x}, t)$

$$\psi_0(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x})/\hbar} \quad (\text{A.6.4})$$

και αντικαθιστώντας στην (A.3.3) έχουμε

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t(\psi(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x})/\hbar}) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\psi(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x})/\hbar}) \Rightarrow \\ e^{iS(\vec{x})/\hbar}i\hbar\partial_t\psi(\vec{x}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta(\psi(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x})/\hbar}) \end{aligned} \quad (\text{A.6.5})$$

Πολλαπλασιάζοντας την (A.3.5) με την συζυγή συνάρτηση $e^{-iS(\vec{x})/\hbar}$ έχουμε την εξίσωση

$$i\hbar\partial_t\psi(\vec{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-iS(\vec{x})/\hbar}\Delta(\psi(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x})/\hbar}) \quad (\text{A.6.6})$$

Θα αποδείξουμε ότι η ακόλουθη σχέση ισχύει

$$e^{-iS(\vec{x})/\hbar}(-\hbar^2\Delta)e^{iS(\vec{x})/\hbar} = \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 \quad (\text{A.6.7})$$

αν και μόνο αν : $-\vec{\nabla}S = \frac{q}{c}\vec{A}$.

Χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες υπολογίζουμε πρώτα τη μερική παράγωγο ∂_x

$$\partial_x\left(e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\right) = \frac{i}{\hbar}\partial_x S(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} + e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\partial_x \quad (\text{A.6.9})$$

Η δεύτερη μερική παράγωγος δίνει

$$\begin{aligned} \partial_x\left[-\hbar^2\left(\frac{i}{\hbar}\partial_x S(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} + e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\partial_x\right)\right] &= \\ = -\hbar^2\left(\frac{i}{\hbar}\partial_x^2 S(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} + \frac{i}{\hbar}\partial_x S(x)\frac{i}{\hbar}\partial_x S(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} + \frac{i}{\hbar}\partial_x S(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\partial_x + \frac{i}{\hbar}\partial_x S(x)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\partial_x + e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\partial_x^2\right) &= \\ = \frac{-\hbar^2 i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\left[\partial_x^2 S(x) + \frac{i}{\hbar}|\partial_x S(x)|^2 + 2\partial_x S(x)\partial_x\right] + e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\partial_x^2 &= \\ = -\hbar\left(i\partial_x^2 S(x) - \frac{1}{\hbar}|\partial_x S(x)|^2 + 2i\partial_x S(x)\partial_x + \hbar\partial_x^2\right) & \end{aligned} \quad (\text{A.6.10})$$

Άρα σε διανυσματική μορφή έχουμε

$$-\hbar\left(i\vec{\nabla}^2 S(x) - \frac{1}{\hbar}|\vec{\nabla}S(x)|^2 + 2i\vec{\nabla}S(x)\vec{\nabla} + \hbar\vec{\nabla}^2\right) \quad (\text{A.6.10})$$

Αναπτύσσοντας τη Χαμιλτονιανή με το ανυσματικό δυναμικό έχουμε

$$\begin{aligned} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 &= \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \cdot \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) = \\ &= i^2\hbar^2\vec{\nabla}^2 + i\hbar\frac{q}{c}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}) + \left(\frac{q}{c}\right)^2\vec{A}^2 \end{aligned} \quad (\text{A.6.11})$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (A.6.10) και (A.6.11) έχουμε

$$-\hbar\left(i\vec{\nabla}^2S(x) - \frac{1}{\hbar}|\vec{\nabla}S(x)|^2 + 2i\vec{\nabla}S(x)\vec{\nabla} + \hbar\vec{\nabla}^2\right) = i^2\hbar^2\vec{\nabla}^2 + i\hbar\frac{q}{c}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}) + \left(\frac{q}{c}\right)^2\vec{A}^2 \quad (\text{A.6.12})$$

εάν και μόνο εάν

$$-\vec{\nabla}S = \frac{q}{c}\vec{A} \quad (\text{A.6.13})$$

Παράρτημα A.7

Βασική θεωρία των συναρτήσεων Bessel, η διαφορική εξίσωση Bessel και οι λύσεις της

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε την εξίσωση

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2)u = 0 \quad (\text{A.7.1})$$

Αυτή είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, γραμμική, ομογενή με μεταβλητούς συντελεστές. Ονομάζεται εξίσωση του Bessel και μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυναμοσειρών. Γνωρίζουμε ότι κάθε λύση μιας γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης γράφεται στη μορφή

$$u(z) = C_1u_1(z) + C_2u_2(z) \quad (\text{A.7.2})$$

όπου $u_1(z)$ και $u_2(z)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της. Υποθέτουμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή z και ο αριθμός ν μπορούν να πάρουν οποιοδήποτε μιγαδική τιμή. Αν $z \in \mathbb{R}$ τότε θα τη συμβολίζουμε με x ενώ αν $\nu \in \mathbb{Z}$ τότε θα τη συμβολίζουμε με n . Ορίζουμε τον τελεστή Bessel της ποσότητας ν ως

$$\nabla_\nu \equiv z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - \nu^2 \quad (\text{A.7.3})$$

οπότε η (1.1) γράφεται στην μορφή $\vec{\nabla}_\nu u = 0$

Με την μέθοδο των δυναμοσειρών αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{m+a}, \quad a_0 \neq 0 \quad (\text{A.7.4})$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_m του αναπτύγματος (Α.4.3) σχηματίζουμε τις αντίστοιχες παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης οπότε έχουμε.

$$\begin{aligned} u'(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+a) z^{m+a-1} \\ u''(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+a)(m+a-1) z^{m+a-2} \end{aligned} \quad (\text{A.7.5})$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην (Α.4.2) έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla_v u &= [a(a-1) + a - v^2] a_0 z^a + [(a+1)a + (a+1) - v^2] a_1 z^{a+1} + \dots \\ &= a_0 (a^2 - v^2) z^a + a_1 [(a+1)^2 - v^2] z^{a+1} + \sum_{m=2}^{\infty} [a_m ((a+m)^2 - v^2) + a_{m-2}] z^{a+m} \end{aligned} \quad (\text{A.7.6})$$

Επειδή $\nabla_v u = 0$ όλοι οι συντελεστές των z^{a+m} όρων θα πρέπει να μηδενίζονται με αποτέλεσμα να λαμβάνουμε το ακόλουθο σύνολο σχέσεων

$$\begin{aligned} a_0 (a^2 - v^2) &= 0 \\ a_1 [(a+1)^2 - v^2] &= 0 \\ a_m ((a+m)^2 - v^2) + a_{m-2} &= 0, \quad m = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.7.7})$$

Υποθέτουμε ότι $a_0 \neq 0$ οπότε η πρώτη εξίσωση ικανοποιείται όταν

$$(a^2 - v^2) = 0$$

ή ισοδύναμα όταν $a = \pm v$. Οι συντελεστές με τους άρτιους δείκτες προσδιορίζονται αναδρομικά και είναι

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha_0}{4(\alpha+1)}, \quad \alpha_4 = -\frac{\alpha_2}{8(\alpha+2)} = \frac{\alpha_0}{4 \cdot 8 \cdot (\alpha+1)(\alpha+2)}, \dots \quad (\text{A.7.8})$$

Οι συντελεστές με τους περιττούς δείκτες μηδενίζονται αφού ο πρώτος μηδενίζεται. Επιλέγοντας την τιμή $a = v$ παίρνουμε για την πρώτη λύση της εξίσωσης

$$u_1(z) = a_0 z^v \left[1 - \frac{z^2}{4 \cdot 1 \cdot (v+1)} + \frac{z^4}{4^2 \cdot 2! (v+1)(v+2)} + \dots \right] \quad (\text{A.7.9})$$

ενώ για $a = -v$ η δεύτερη λύση γράφεται στη μορφή

$$u_2(z) = a_0' z^{-\nu} \left[1 - \frac{z^2}{4 \cdot 1 \cdot (\nu+1)} + \frac{z^4}{4^2 \cdot 2! \cdot (-\nu+1)(-\nu+2)} + \dots \right] \quad (\text{A.7.10})$$

Συνήθως στις σταθερές a_0 και a_0' επισυνάπτουμε τις τιμές

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, a_0' = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma(-\nu+1)}. \quad (\text{A.7.11})$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ της συνάρτησης Γάμμα μπορούμε να γράψουμε τις προηγούμενες λύσεις σε μια πιο συμπαγή μορφή. Η πρώτη λύση $u_1(z)$ λέγεται συνάρτηση Bessel ή κυλινδρική συνάρτηση πρώτου είδους της συνάρτησης Bessel με δείκτη ν και δίνεται από την

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}. \quad (\text{A.7.12})$$

Η δεύτερη λύση εκφράζει την συνάρτηση Bessel με δείκτη $-\nu$,

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}. \quad (\text{A.7.13})$$

Γενικές ιδιότητες της $J_\nu(z)$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι σειρές αυτές συγκλίνουν $\forall z \in \mathbb{C}$. Συγκεκριμένα η σειρά $J_\nu(z)$ συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο χωρίο. Όταν $|\nu| \leq N$ και $|z| \leq d$ τότε η ακτίνα σύγκλισης της σειράς είναι

$$\left| \frac{-z^2/4}{m(\nu+m)} \right| \leq \frac{d^2/4}{m(m-N)} < 1. \quad (\text{A.7.14})$$

Εάν το m είναι μεγαλύτερο από την θετική ρίζα της εξίσωσης $m^2 - mN - d^2/4 = 0$, η οποία όπως παρατηρούμε δεν εξαρτάται από τα z, ν , τότε από το τεστ του Weierstrass έχουμε ότι η $J_\nu(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση $\forall z \in \mathbb{C}$ (εκτός ίσως το $\{0\}$) και για κάθε τιμή ν . Τέλος η συνάρτηση z^ν , που είναι παράγοντας της $J_\nu(z)$, με $z = |z|e^{i\theta}$ γράφεται ως $\exp(\nu \log(z))$ και η φάση το $\arg(z)$, που δίνει τη γωνία μεταξύ του θετικού πραγματικού ημιάξονα με την ευθεία που ορίζεται από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων και το σημείο $z \in \mathbb{C}$, λαμβάνει τιμές στο διάστημα

$$-\pi < \arg(z) \leq \pi. \quad (\text{A.7.15})$$

Βασικές αναδρομικές σχέσεις για τις Bessel συναρτήσεις

Η γεννήτρια συνάρτηση των συντελεστών των Bessel συναρτήσεων είναι

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \quad (\text{A.7.16})$$

και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent ως εξής

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \quad (\text{A.7.17})$$

Θα δείξουμε τώρα τις ταυτότητες

$$1) J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) \quad (\text{A.7.18})$$

$$2) J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z) \quad (\text{A.7.19})$$

όπου η δεύτερη έχει χρησιμοποιηθεί στην σχέση (3.2.19)

Απόδειξη 1) Παραγωγίζοντας τη σχέση (A.4.17) ως προς t έχουμε

$$\frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n-1} J_n(z) \quad (\text{A.7.20})$$

και χρησιμοποιώντας την (A.7.17) έχουμε ότι

$$\frac{z}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n-1} J_n(z) \quad (\text{A.7.21})$$

Πολλαπλασιάζοντας την (A.7.21) με t^2 έχουμε

$$\begin{aligned} (t^2 + 1) \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) &= \frac{2}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n+1} J_n(z) \Rightarrow \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+2} J_n(z) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) &= \frac{2}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n+1} J_n(z) \Rightarrow \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+1} (J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) &= \frac{2}{z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n+1} J_n(z) \\ \frac{z}{2} (J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z)) &= n J_n(z) \end{aligned} \quad (\text{A.7.22})$$

Απόδειξη 2) Παραγωγίζοντας πάλι την σχέση (A.4.17) ως προς z έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)z} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \Leftrightarrow \\ \frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \end{aligned} \quad (\text{A.7.23})$$

από την οποία προκύπτει το ζητούμενο πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ισότητας με t .

Προσθέτοντας και αφαιρώντας αυτές της σχέσεις μπορούμε να λάβουμε σχέσεις μεταξύ των παραγώγων της $J_n(z)$ και των $J_{n\pm 1}(z)$ δηλαδή τις ακόλουθες

$$\begin{aligned} zJ'_n(z) + nJ_n(z) &= zJ_{n-1}(z) \\ zJ'_n(z) - nJ_n(z) &= -zJ_{n+1}(z) \end{aligned} \quad (\text{A.7.24})$$

που ισοδύναμα μπορούν να γραφούν

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) &= z^n J_{n-1}(z) \\ \frac{d}{dz}(z^{-n} J_n(z)) &= -z^{-n} J_{n+1}(z)\end{aligned}\tag{A.7.25}$$

Στην ειδική περίπτωση που το $n=0$ έχουμε

$$J_0(z) = -J_1(z)\tag{A.7.26}$$

Ασυμπτωτική συμπεριφορά των Bessel συναρτήσεων

Θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά των Bessel συναρτήσεων για z πολύ μεγάλο. Σημειώνουμε ότι η διαδικασία εξαρτάται από το εάν οι τιμές του ν είναι μεγάλες ή μικρές.

Για ιστορικούς λόγους αναφέρουμε ότι η επίλυση του πιο ‘δύσκολου’ κομματιού αυτού του προβλήματος έγινε από τον Carlin μερικά χρόνια πριν ο Poisson δημοσιεύσει την έρευνα του πάνω στην συμπεριφορά της $J_0(x)$ για x πολύ μεγάλο.

Η φορμαλιστική έκφραση του αναπτύγματος που μας δίνει ο Poisson είναι:

$$J_0(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \left(1 - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8x)^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{4!(8x)^4} - \dots\right) + \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) \left(\frac{1^2}{1!8x} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!(8x)^3} + \dots\right) \right]$$

με την προϋπόθεση ότι το x είναι μεγάλο και θετικό.

Μια ανάλογη έκφραση βρέθηκε από τον Hansen για την $J_1(x)$ λίγα χρόνια αργότερα. Παρόλα αυτά ο Jacobi ήταν εκείνος που έδωσε μια γενική έκφραση για την $J_n(x)$ στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}J_n(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\cos\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left(1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)(4n^2 - 7^2)}{4!(8x)^4} - \dots\right) \right. \\ \left. - \sin\left(x - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \left(\frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8x)^3} + \dots\right) \right]\end{aligned}$$

Παράρτημα Α.8

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \Rightarrow$$

$$\int_0^b e^{-a^2 x^2} dx + \int_b^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \Rightarrow \quad (\text{A.8.1})$$

$$L = \int_b^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} - \int_b^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx$$

οπότε αν θέσουμε $ax = y$, $dx = \frac{dy}{a}$ έχουμε

$$L = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} - \frac{1}{a} \int_0^{ab} e^{-y^2} dy \quad (\text{A.8.2})$$

Η συνάρτηση του δεύτερου μέλους γράφεται

$$\frac{1}{a} \int_0^{ab} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \operatorname{erf}(ab) \quad (\text{A.8.3})$$

άρα

$$\int_b^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} (1 - \operatorname{erf}(ab)) \quad (\text{A.8.4})$$

με την $\operatorname{erf}(ab)$ για $ab \rightarrow \infty$ να προσεγγίζεται από την

$$\operatorname{erf}(ab) \sim 1 - \frac{e^{-(ab)^2}}{ab\sqrt{\pi}} \left\{ 1 - \frac{1}{2(ab)^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2(ab)^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2(ab)^2)^3} + \dots \right\} \quad (\text{A.8.5})$$

Αν θέσουμε όπου πρώτα $a^2 \rightarrow -i$ και μετά $b \rightarrow a$, τότε παρατηρούμε ότι η (A.8.4) γράφεται

$$\int_a^{\infty} e^{iz^2} dz \rightarrow \frac{ie^{ia^2}}{2a}, \quad \int_a^{\infty} e^{-iz^2} dz \rightarrow \frac{-ie^{-ia^2}}{2a}$$

Παράρτημα Α.9

Η διατομή συνδέεται με ένα συγκεκριμένο γεγονός (π.χ. ελαστική σύγκρουση, μια συγκεκριμένη χημική αντίδραση, μια ειδική πυρηνική αντίδραση) που περιλαμβάνει ένα ορισμένο συνδυασμό ακτίνων (π.χ. φως, στοιχειώδη σωματίδια, πυρήνες) και το υλικό-στόχο

(π.χ. κολλοειδή, αέρια, τα άτομα, οι πυρήνες). Συχνά υπάρχουν πρόσθετοι παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν τη διατομή σε περίπλοκες τρόπους, όπως την ενέργεια της δέσμης.

Για ένα συγκεκριμένο γεγονός η σκεδαζόμενη κάθετη διατομή δίνεται από την εξής σχέση:

$$\sigma = \frac{\mu}{n} \quad (\text{A.9.1})$$

Όπου σ είναι η διατομή αυτού του γεγονότος (μονάδες SI: m^2), μ είναι ο συντελεστής εξασθένησης λόγω της εμφάνισης αυτού του γεγονότος (μονάδες SI: m^{-1}), και n είναι ο αριθμός πυκνότητα των σωματιδίων στόχου (μονάδες SI: m^{-3}).

Ισοδύναμα, εάν ο υλικός στόχος είναι μια λεπτή πλάκα όπου τοποθετείται κάθετα προς την δέσμη, μπορεί κανείς να εκφράσει τη διατομή σε όρους ροής:

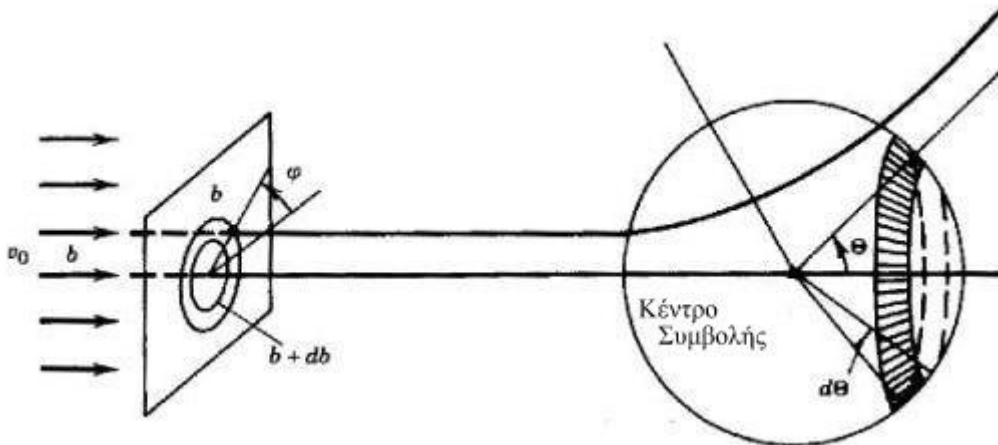
$$\sigma = \frac{1}{n\Phi} \left(-\frac{d\Phi}{dz} \right) \quad (\text{A.9.2})$$

όπου $-d\Phi$ είναι η ποσότητα της ροής που χάνεται λόγω της εμφάνισης αυτού του γεγονότος, dz είναι το πάχος του υλικού-στόχου, και Φ είναι η ροή της προσπίπτουσας δέσμης.

Για διακριτά γεγονότα που αφορούν μια δέσμη σωματιδίων, η διατομή σ δίνεται από:

$$\sigma = \frac{1}{nIA} \frac{dW}{dz} \quad (\text{A.9.3})$$

που dW είναι ο ρυθμός με τον οποίο λαμβάνει χώρα η εκδήλωση (μονάδες SI: s^{-1}), I είναι η ροή σωματιδίου (ή ένταση) της προσπίπτουσας δέσμης (μονάδες SI: $m^{-2}s^{-1}$), και A είναι η περιοχή επικάλυψης μεταξύ της ακτίνας και του στόχου (μονάδες SI: m^2).



Σκεδαζόμενη παράλληλη ακτίνα με τον άξονα $\chi\chi$ με συγκεκριμένο κέντρο συμβολής.

Κεφάλαιο 4

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τα πρώτα πειράματα που πραγματοποιήθηκαν για την επαλήθευση του φαινομένου B-A. Τα πειράματα διεξήχθησαν από τους Chambers, Mollenstedt, Bayh και δέχτηκαν κριτική τόσο για την θεωρητική όσο και για την πειραματική προσέγγισή τους από τους Bocchieri και Loinger.

4.1-Τα πρώτα πειράματα

Το 1960 πραγματοποιείται το πρώτο πείραμα από τον Chambers με συμβολή ηλεκτρονίων που έμελλε να επιβεβαιώσει ή να ανατρέψει τη θεωρία των Bhom-Aharonov. Η προβλεπόμενη διαφορά φάσης αναδείχτηκε χρησιμοποιώντας ένα κωνικό μεταλλικό σωληνοειδές, αντί για το κανονικό σωληνοειδές, σε μια λίγο παραλλαγμένη διάταξη.

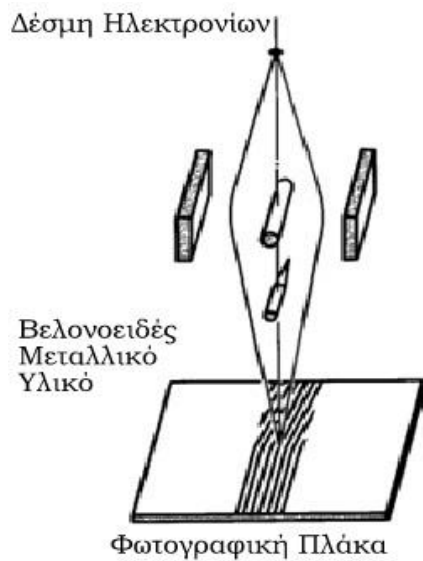
Μετά οι Mollenstedt και Bayh πρόβλεψαν τη διαφορά φάσης υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου στο φαινόμενο B-A, μεταβάλλοντας το μαγνητικό πεδίο μέσα στο σωληνοειδές και πετυχαίνοντας την αποτύπωση της δυναμικής συμπεριφοράς σε μια φωτογραφία. Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι και ο Boerch επιβεβαίωσε τη διαφορά φάσης χρησιμοποιώντας εικόνες Permalloy.

Οι Jaklevic, Later, Matteucci και Pozzi επιβεβαίωσαν τη διαφορά φάσης χρησιμοποιώντας την υπεραγώγιμη παρεμβολή. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποίησαν ένα διπρισματικό νήμα που καλύπτεται με ένα στρώμα σιδηρομαγνητικού υλικού. Παρακάτω θα περιγράψουμε και θα αναλύσουμε μερικά πειράματα.

Πείραμα Chambers

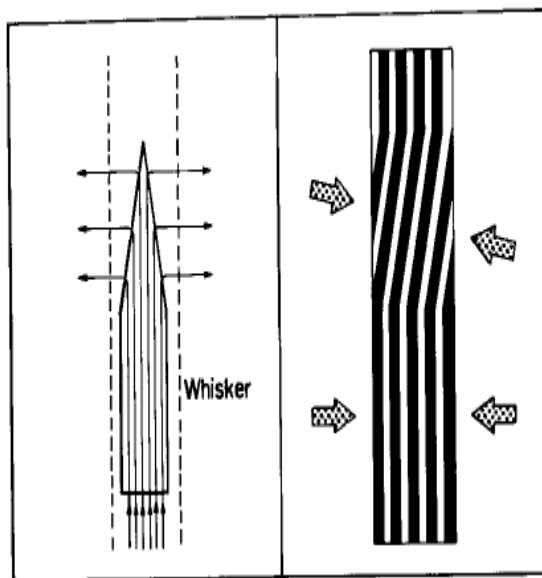
Τα πειράματα του Chambers ήταν τα πρώτα που είχαν σαν στόχο να εξετάσουν το φαινόμενο των B-A. Για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων τους χρησιμοποιήθηκε και ηλεκτρονικό μικροσκόπιο.

Μια απεικόνιση της πειραματικής διάταξης δίνεται στο Σχήμα (4.1.1). Δέσμη ηλεκτρονίων που εκπέμπεται από σημειακή πηγή προσπίπτει σε ηλεκτρικό δίπρισμα τύπου Mollenstedt που αποτελείται από ένα λεπτό σύρμα, ένα γειωμένο ηλεκτρόδιο στην άλλη πλευρά και δυο κάθετες, μεταλλικές και γειωμένες λεπτές πλάκες.



Σχήμα (4.1.1) Πειραματική διάταξη του Chambers.

Όταν θετικό δυναμικό περίπου $\approx 10V$ εφαρμόζεται στο κεντρικό λεπτό σύρμα, τα ηλεκτρόνια εκείνη τη στιγμή διέρχονται και από της δύο πλευρές του σύρματος και έλκονται προς το κέντρο. Μετά ξανασυναντιούνται και συμβάλλουν στο κατώτερο σημείο. Οι ασπρόμαυρες γραμμές είναι παράλληλες προς το λεπτό αυτό σύρμα. Όταν τοποθετηθεί στην σκιά του λεπτού σύρματος ένα μεταλλικό βελονοειδές νήμα πάχους $\approx 1\mu m$ οι γραμμές που δημιουργούνται έχουν μια μικρή κλίση στην περιοχή όπου το βελονοειδές είναι κωνικό. Επειδή το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του νήματος είναι σταθερό κατά την αξονική διεύθυνση, η μαγνητική ροή θα είναι ανάλογη του εμβαδού της κάθετης διατομής του νήματος. Στο Σχήμα (4.1.2) απεικονίζουμε το βελονοειδές μεταλλικό υλικό και τους κροσσούς συμβολής.



Σχήμα (4.1.2) Το μαγνητικό πεδίο παραμένει σταθερό στο εσωτερικό του βελονοειδούς μεταλλικού υλικού κατά την αξονική κατεύθυνση.

Οι κροσσοί συμβολής μπορούν να εξηγηθούν λόγω της διαφοράς φάσης που είναι ανάλογη με τη μαγνητική ροή μέσα στο βελονοειδές υλικό.

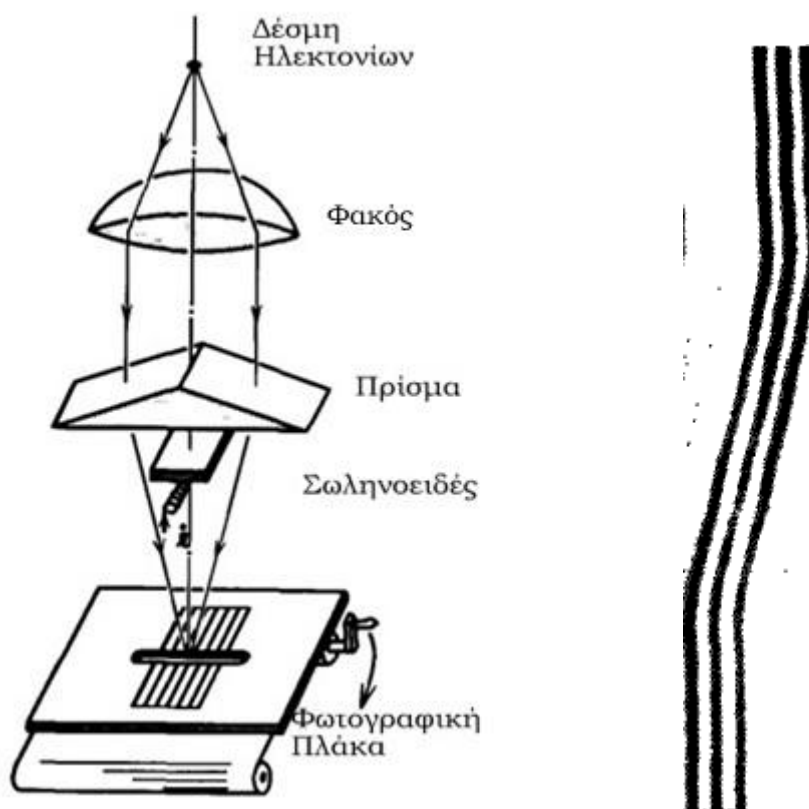
Πράγματι όταν το μαγνητικό πεδίο διαφεύγει κάθετα στην επιφάνεια του κωνοειδούς υλικού, τα ηλεκτρόνια εκτρέπονται ελαφρώς κατά την αξονική κατεύθυνση. Η εκτροπή

λαμβάνει χώρα και στις δύο απέναντι πλευρές του σύρματος. Οπότε οι δυο δέσμες ηλεκτρονίων δεν συναντώνται κάθετα στο διπρισματικό νήμα που βρίσκεται στο επίπεδο παρατήρησης. Ως αποτέλεσμα οι κροσσοί συμβολής παρουσιάζουν μικρή κλίση. Αυτή η κλίση στους κροσσοί συμβολής μπορεί να εξηγηθεί με την παρουσία των μαγνητικών πεδίων. Οι κροσσοί είναι συνεχείς ζώνες οπότε καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μετατόπιση φάσης υπάρχει ακόμα και στην ομοιόμορφη περιοχή. Αυτή η μετατόπιση φάσης δεν εξηγείται από την Κλασική Μηχανική.

Το πείραμα των Bayh-Mollenstedt

Σύμφωνα με τους Bohm-Aharonov τα πειράματα που είχαν διεξαχθεί μέχρι τότε δεν ήταν ιδανικά γιατί τα ανυσματικά δυναμικά ήταν αναμειγμένα με τα μαγνητικά πεδία. Σε αυτό το πείραμα θα παρουσιάσουμε μια διάταξη που η συμπεριφορά των ηλεκτρονίων οφείλεται αποκλειστικά στα ανυσματικά δυναμικά. Η πειραματική διάταξη δίνεται στο Σχήμα (4.1.3α).

Μια παράλληλη δέσμη ηλεκτρονίων διαχωρίζεται σε δύο υποδέσμες με τη χρήση ενός διπρίσματος. Μετά οι υποδέσμες αλληλεπικαλύπτονται και σχηματίζονται οι κροσσοί συμβολής. Ένα εξαιρετικά λεπτό σωληνοειδές τοποθετείται στο κέντρο μεταξύ των δυο υποδεσμών. Στο συγκεκριμένο πείραμα χρησιμοποιήθηκαν τρία διπρισματικά στάδια έτσι ώστε οι δύο υποδέσμες των ηλεκτρονίων να παραμείνουν μακριά η μια από την άλλη αποφεύγοντας το φωτισμό του σωληνοειδούς. Επίσης έχει τοποθετηθεί και ένας σιδηρομαγνητικός ζυγός έτσι ώστε να αποτραπεί η παρουσία επιπλέον ασπρόμαυρων γραμμών που δεν συνδέονται με το φαινόμενο B-A.



Σχήματα (4.1.3α) Η πειραματική διάταξη των Bayh-Mollenstedt. (4.1.3β) Οι κροσσοί συμβολής που παίρνουμε.

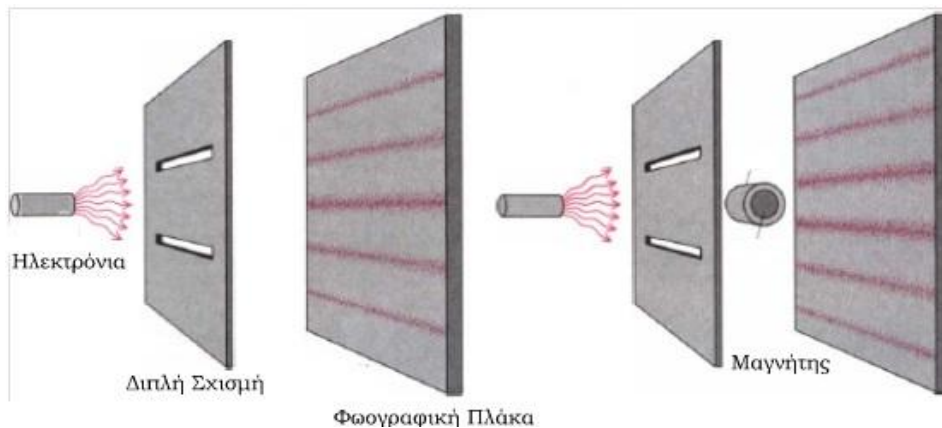
Βρέθηκε ότι όταν το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το σωληνοειδές αυξηθεί, οι ασπρόμαυρες γραμμές μετακινούνται προς την μια πλευρά ενώ η περιοχή από όλο το σημείο παρεμβολής παρέμενε ανεπηρέαστη. Για να αποτυπωθεί η συμπεριφορά των ηλεκτρονίων χρησιμοποιήθηκε φωτογραφική πλάκα που τοποθετήθηκε πίσω από μια σχισμή. Η φωτογραφική πλάκα ήταν κατασκευασμένη με τέτοιο τρόπο ώστε να παρακολουθεί την

αύξηση του μαγνητικού πεδίου. Το αποτέλεσμα της συμπεριφοράς των ηλεκτρονίων είναι καταγεγραμμένο στην παραπάνω φωτογραφία (4.1.3β).

Η μετατόπιση των ασπρόμαυρων γραμμών οφείλεται στο ηλεκτρικό πεδίο που χρησιμοποιήθηκε για να δημιουργηθεί αύξηση του μαγνητικού πεδίου. Είναι αξιοσημείωτο να αναφέρουμε ότι η ίδια μετατόπιση συνεχίστηκε ακόμα και μετά το σταμάτημα της αύξησης του μαγνητικού πεδίου. Αυτή η παρατήρηση μας προδιαθέτει να συμπεράνουμε ότι το φαινόμενο Bohm-Aharonov ισχύει. Διάφορα είδη επιχειρημάτων έχουν παρουσιαστεί από την ανακάλυψη του φαινομένου B-A και μετά. Στα μέσα του 1970 η συζήτηση εστιαζόταν στο θεωρητικό μέρος των αποτελεσμάτων αυτού του φαινομένου. Η ραγδαία αύξηση του ενδιαφέροντος οδήγησε στη θεώρηση ότι αποτελεί πειραματική απόδειξη για την θεωρία πεδίων. Καθώς όμως ο χρόνος προχώρησε, η ύπαρξη του φαινομένου άρχισε να αμφισβητείται, οπότε η διαμάχη ξέσπασε ξανά.

Το πείραμα της διπλής σχισμής

Ένα πολύ απλό πείραμα που επιβεβαιώνει την ύπαρξη του φαινομένου είναι αυτό της διπλής σχισμής. Το πείραμα αυτό πραγματοποιείται ακόμα και στις μέρες μας. Φανταστείτε στην μια πλευρά της διάταξης μια πηγή ηλεκτρονίων. Τα εκπεμπόμενα ηλεκτρόνια έχουν την ίδια ενέργεια και ορμή οπότε οι κυματοσυναρτήσεις θα έχουν την ίδια φάση σε δεδομένη απόσταση από την πηγή. Καθώς το κύμα διέρχεται από τις σχισμές διαχωρίζεται σε δύο μερικά κύματα. Επειδή κάθε μερικό κύμα διανύει την ίδια απόσταση μέχρι τη σχισμή τα μερικά κύματα που εξέρχονται από τις σχισμές θα έχουν την ίδια φάση. Οπότε σε ένα σημείο της φωτογραφικής πλάκας που ισαπέχει από τις δύο σχισμές τα μερικά κύματα θα είναι σε φάση. Έτσι δημιουργείται μια φωτεινή ζώνη στο κέντρο της φωτογραφικής πλάκας. Για να παρατηρήσουμε το φαινόμενο B-A το πείραμα της διπλής σχισμής πρέπει να τροποποιηθεί. Ακριβώς πίσω από το επίπεδο με τις σχισμές τοποθετούμε μεγάλο σωληνοειδές με μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του, ενώ στο εξωτερικό του δεν υπάρχει ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο. Όταν δέση ηλεκτρονίων διέρχεται από τις σχισμές τότε οι υποδέσμες που δημιουργούνται μετά την έξοδο της από τις σχισμές, περνάνε γύρω από το σωληνοειδές και παράγουν νέους κροσσούς συμβολής. Συγκρίνοντας τους νέους κροσσούς συμβολής με τους παλιούς παρατηρούμε μια μετατόπιση των φωτεινών ζωνών προς στις σκοτεινές ζώνες και αντιστρόφως. Όταν το σωληνοειδές αφαιρεθεί από την πειραματική διάταξη οι κροσσοί επανέρχονται στις αρχικές τους θέσεις.



Σχήμα (4.1.4) 1)Χωρίς μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό, 2)Με μαγνητικό πεδίο.

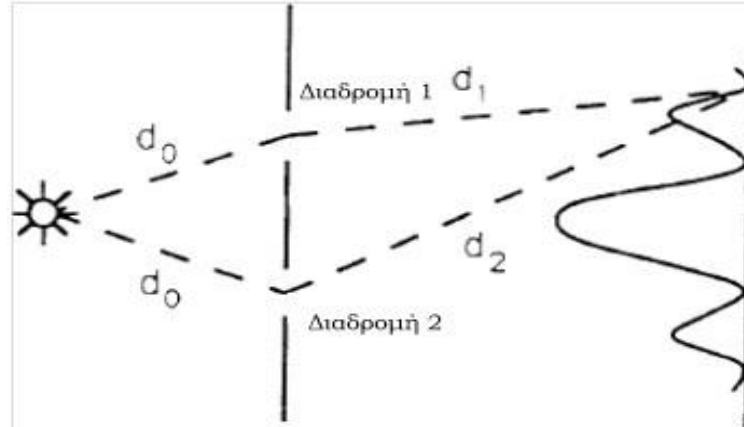
Θεωρητικά το φαινόμενο B-A μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής. Κατά μήκος των κλασικών διαδρομών 1 και 2 η φάση των κυματοσυναρτήσεων των ηλεκτρονίων μετατοπίζονται κατά

$$\varphi_1 = 2\pi \frac{d_0 + d_1}{\lambda}, \varphi_2 = 2\pi \frac{d_0 + d_2}{\lambda} \quad (4.1.1)$$

όπου $\lambda = 2\pi/p$ είναι το μήκος κύματος de Broglie και p ο κυματικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των μηκών κύματος λ σε απόσταση 2π .

Η κυματοσυνάρτηση σε δεδομένο σημείο της πλάκας ανίχνευσης δίνεται από την υπέρθεση των κυματομορφών που σχετίζονται με τα μονοπάτια 1 και 2:

$$\psi \approx N(e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}) \quad (4.1.2)$$



Σχήμα (4.1.5) Το πείραμα της διπλής σχισμής χωρίς το σωληνοειδές στο σύστημα

Χρησιμοποιώντας τον ελεύθερο διαδότη του Feynman που δίνεται από τη σχέση

$$D_F(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = \left(\frac{m}{2\pi i(t_2 - t_1)} \right)^{1/2} e^{i \left(\frac{m|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{2(t_2 - t_1)} \right)} \quad (4.1.3)$$

σε συνδυασμό με την αρχή της υπέρθεσης για τα κύματα που εξέρχονται από τις δυο σχισμές βρίσκουμε ότι

$$\text{Πλάτος} \approx e^{i \left(\frac{m d_2^2}{2T} \right)} + e^{i \left(\frac{m d_1^2}{2T} \right)} = 2e^{i \left(\frac{m(d_2^2 + d_1^2)}{4T} \right)} \cos \left(\frac{m(d_2^2 - d_1^2)}{4T} \right) \quad (4.1.4)$$

Τελικά, γράφοντας

$$\frac{m(d_2^2 - d_1^2)}{4T} = \frac{p(d_2^2 - d_1^2)}{2} \quad (4.1.5)$$

με $p \approx \frac{m(d_2 + d_1)}{T}$ την ορμή και χρησιμοποιώντας τη σχέση de Broglie παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα για την πιθανότητα

$$P = |\psi|^2 = 4|N|^2 \cos^2 \left(\pi \frac{d_2 - d_1}{\lambda} \right) \approx 4|N|^2 \cos^2 \left(\pi \delta \frac{\sin(\theta)}{\lambda} \right) \quad (4.1.6)$$

όπου δ είναι η απόσταση μεταξύ των σχισμών, θ η γωνία εκτροπής και $|N|^2$ είναι η ένταση όταν είναι ανοιχτή η μια μόνο σχισμή.

Τώρα φανταστείτε τι θα γίνει αν ένα απείρου μήκους σωληνοειδές, ακτίνας R , εισαχθεί μέσα στο σύστημα. Τότε η ροή του μαγνητικού πεδίου στο εξωτερικό του είναι μηδενική.

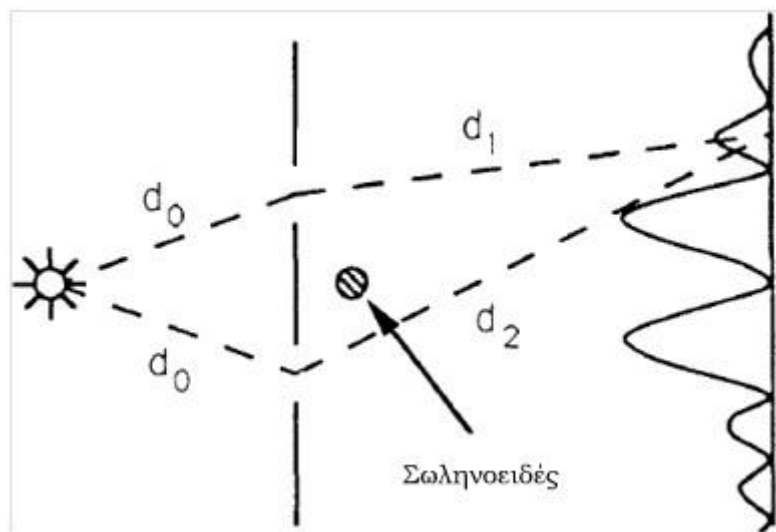
Παρόλα αυτά υπάρχει το ανυσματικό δυναμικό στην περιοχή αυτή. Παίρνοντας τον άξονα συμμετρίας του σωληνοειδούς να ορίζει την z κατεύθυνση και χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες r, φ, z το ανυσματικό δυναμικό μπορεί να εκλεγεί ως εξής

$$\vec{A} = \begin{cases} \vec{e}_\varphi \frac{1}{2} B_0 r, & r < R \\ \vec{e}_\varphi \frac{1}{2} B_0 \frac{R^2}{r}, & r > R \end{cases} \quad (4.1.7)$$

οπότε

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{e}_z \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \begin{cases} \vec{e}_z B_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (4.1.8)$$

όπως απαιτείται.



Σχήμα (4.1.6) Το πείραμα της διπλής σχισμής με το σωληνοειδές στο σύστημα

Το αποτέλεσμα αυτού του ανυσματικού δυναμικού στις κυματοσυναρτίσεις των ηλεκτρονίων μπορεί να βρεθεί με την χρήση μεθόδων ολοκληρωμάτων τροχιάς σύμφωνα με τις οποίες η μεταβολή στη φάση της κυματοσυνάρτησης κατά μήκος της διαδρομής 1 δίδεται από την κλασική δράση:

$$S_1 = \int_{c_1} dt L[x(t), \dot{x}(t)] \quad (4.1.9)$$

Χρησιμοποιώντας την Χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση φορτισμένου σωματιδίου με ανυσματικό δυναμικό έχουμε

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{|\vec{p} - q\vec{A}|^2}{2} \quad (4.1.10)$$

και αντιστοιχεί στη συνάρτηση Lagrange

$$L[\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)] = \vec{p} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} - L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 + q\vec{A} \cdot \dot{\vec{x}} \quad (4.1.11)$$

Άρα

$$S_1 = S_0 + m \frac{d_1^2}{2T} + q \int_{c_1} d\vec{x} \cdot \vec{A} \quad (4.1.12)$$

όπου S_0 είναι η φάση που έχουν οι κυματοσυναρτήσεις πριν περάσουν από τις σχισμές. Παρόμοια η φάση για την δεύτερη διαδρομή δίνεται από την

$$S_2 = S_0 + m \frac{d_2^2}{2T} + q \int_{c_2} d\vec{x} \cdot \vec{A} \quad (4.1.13)$$

Η προκύπτουσα εικόνα συμβολής έχει πυκνότητα πιθανότητας

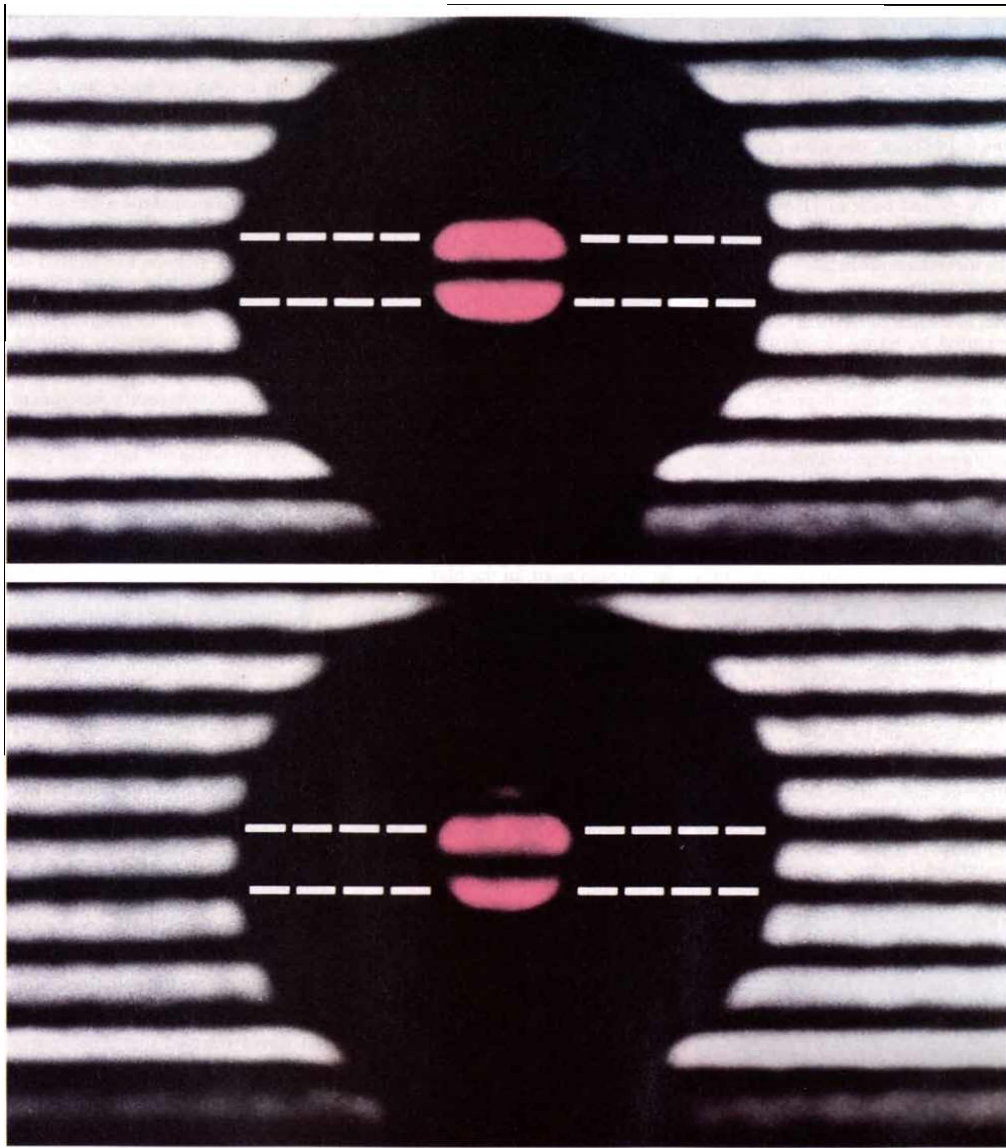
$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= |e^{iS_1} + e^{iS_2}|^2 = \left| 2 \cos \left[m \frac{d_2^2 - d_1^2}{4T} + \frac{q}{2} \left(\int_{c_2} - \int_{c_1} \right) d\vec{x} \cdot \vec{A} \right] \right|^2 \\ &= 4 \cos^2 \left(\pi \delta \frac{\sin(\theta)}{\lambda} + \frac{q}{2} \oint d\vec{x} \cdot \vec{A} \right) \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

και παρατηρούμε ότι υπάρχει μια μετατόπιση στην εικόνα που οφείλεται στο φαινόμενο Bohm -Aharonov .

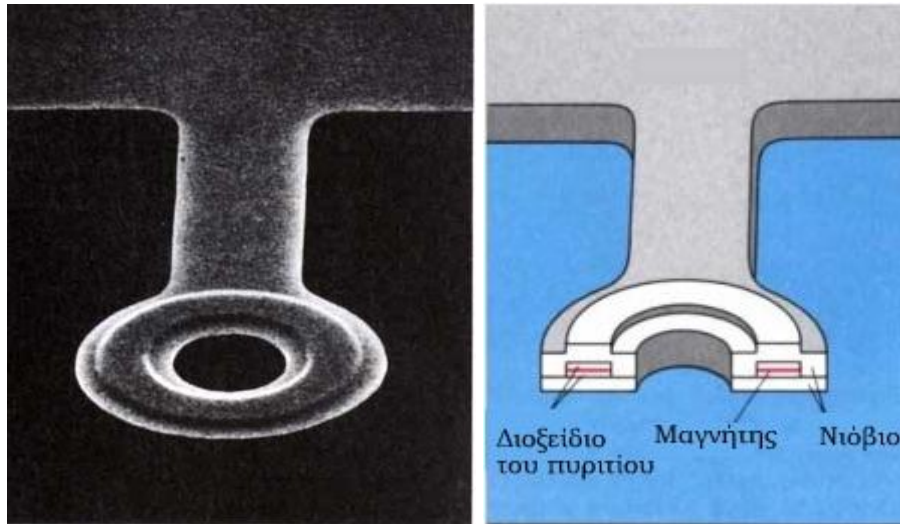
Το πείραμα του Akira Tonomura και των συνεργατών του

Το παρακάτω πείραμα πραγματοποιήθηκε το 1986 από τον Akira Tonomura και των συνεργατών του με τις συστάσεις του Charles Kuper. Είναι πολύ διαφορετικό από τα υπόλοιπα που έχουμε παρουσιάσει μέχρι τώρα. Το πείραμα αυτό έλυσε το πρόβλημα που είχε δημιουργηθεί με τον περιορισμό του μαγνητικού πεδίου. Δηλαδή τη δημιουργία ενός τελειώς εντοπισμένου μαγνητικού πεδίου έτσι ώστε να είναι εφικτός ο έλεγχος του φαινομένου με μεγαλύτερη ακρίβεια. Ο Tonomura γνώριζε ότι ένα ομογενές μαγνητικό υλικό σε σχήμα τόρου έχει ένα κυκλικό μαγνητικό πεδίο που εντοπίζεται πλήρως στο εσωτερικό του. Δεδομένου ότι όλα τα μαγνητικά υλικά έχουν ατέλειες θα ανέμενε κανείς ένας πραγματικός τοροειδής μαγνήτης να εμφανίζει διαφυγόντα μαγνητικά πεδία. Αυτή είναι η λεγόμενη διαρροή πεδίων και μπορεί να περιοριστεί με την επικάλυψη του μαγνήτη με υπεραγωγίμο υλικό. Έτσι λοιπόν ο Tonomura κατασκεύασε ένα τοροειδή μαγνήτη και τον επικάλυψε με νιόβιο που γίνεται υπεραγωγός κάτω από τους 9,1 βαθμούς Kelvin. Αυτή η επέμβαση διασφαλίζει ότι λιγότερο από 1% του πεδίου στο εσωτερικό του τοροειδή μαγνήτη διεισδύει στην κεντρική οπή.

Στη συνέχεια μια δέσμη ηλεκτρονίων δημιουργήθηκε στο κενό και διαχωρίζεται στα δύο. Η μια υποδέσμη διέρχεται από την οπή του τόρου ενώ η άλλη από την εξωτερική του πλευρά. Οι δύο υποδέσμες συμβάλουν σε φωτογραφική πλάκα ακριβώς πίσω από την οπή του τόρου. Παράλληλα κατασκευάστηκε μια εικόνα συμβολής για σύγκριση. Όταν το νιόβιο ψυχθεί κάτω από τους 9,1 βαθμούς Kelvin γίνεται υπεραγωγός, το μαγνητικό πεδίο περιορίζεται σε συγκεκριμένη τιμή ακολουθώντας τους νόμους της υπεραγωγιμότητας και έτσι το ανυσματικό δυναμικό στην οπή μπορεί να αποκτήσει με τη σειρά του μια τιμή. Ως αποτέλεσμα το ανυσματικό δυναμικό μεταβάλλει τη φάση των ηλεκτρονίων που ταξιδεύουν στο εσωτερικό του τόρου σε σχέση με αυτά που διέρχονται από το εξωτερικό του. Αποτέλεσμα της πειραματικής διάταξης που χρησιμοποιήθηκε ήταν οι ακόλουθες εικόνες συμβολής.



Σχήμα (4.1.7) Μέρος μιας δέσμης ηλεκτρονίων διέρχεται μέσα από ένα τορροειδή μαγνήτη (Μαύρο δακτύλιο στο πάνω μέρος) επικαλυμμένο με νιόβιο. Το άλλο μέρος της δέσμης περνά έξω από τον μαγνήτη. Οι δύο δέσμες δημιουργούν κροσσούς συμβολής (έγχρωμη περιοχή στην κορυφή). Οι κροσσοί συμβολής στο φόντο έξω από το δαχτυλίδι προκύπτουν από τη συμβολή των ηλεκτρονίων που δεν διέρχονται από το δαχτυλίδι. Οι κροσσοί συμβολής μέσα στον τόρο είναι μετατοπισμένοι σε σχέση με τους εξωτερικούς παρόλο που τα ηλεκτρόνια είχαν θεωρακιστεί από το μαγνητικό πεδίο. Η θωράκιση συμβαίνει επειδή το νιόβιο μετατρέπεται σε υπεραγωγός όταν ψύχεται σε θερμοκρασία κάτω από τους 9,1 βαθμούς Kelvin. Η μετατόπιση, όπως προβλέπεται από τους Yakir Aharonov και David Bohm, είναι το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των κυμάτων ηλεκτρονίων και των ανυσματικών δυναμικών, και είναι παρούσα ακόμη όταν το μαγνητικό πεδίο είναι απών. Όταν η επικάλυψη με νιόβιο θερμανθεί πάνω από 9,1 βαθμούς K (κάτω), παύει να είναι υπεραγωγό, το μαγνητικό πεδίο που περιέχεται εντός του τορροειδή μαγνήτη αλλάζει και οι κροσσοί συμβολής μετατοπίζονται απότομα (έγχρωμη περιοχή στο κάτω μέρος).

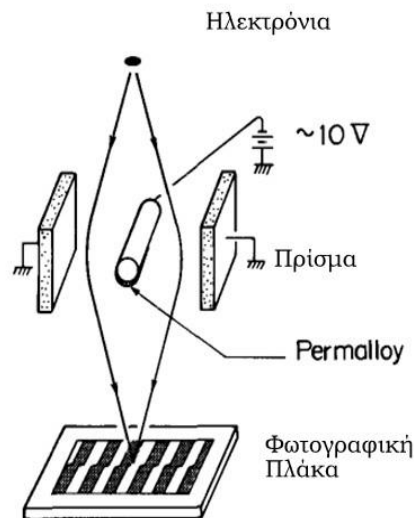


Σχήμα (4.1.8) Τοροειδής μαγνήτης επικαλυμμένος με νιόβιο και αποτελούμενος από ένα κράμα που περιέχει 83% νικέλιο και 17 % σίδηρο. Ένα επίχρισμα διοξειδίου του πυριτίου μονώνει το μαγνήτη από το νιόβιο.

4.2 Οι συζητήσεις σχετικά με την εγκυρότητα των πρώτων πειραμάτων

Το 1978 οι Bocchieri και Loinger ισχυρίστηκαν ότι το φαινόμενο B-A δεν υπάρχει. Η επιχειρηματολογία τους βασίστηκε στην εξάρτηση του B-A από τη βαθμίδα και στο γεγονός ότι αποτελεί ένα μαθηματικό κατασκευάσμα. Υποστήριξαν ότι οι συνέπειες της Κβαντικής Μηχανικής συνδέονται με τις εντάσεις των πεδίων και όχι με τα δυναμικά τους. Κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι παρόλο που οι Aharonov και Bohm μελέτησαν την περίπτωση που ένα ηλεκτρόνιο δεν υπόκειται στην επίδραση μιας δύναμης Lorentz, στα πειράματα συμβολής που είχαν διεξαχθεί μέχρι τότε επηρεάζονταν από την διαρροή πεδίων που δημιουργούνται από τα σωληνοειδή ή από τα βελονοειδή υλικά.

Οι Bocchieri και Loinger υποστήριξαν ότι το πείραμα του Champers μπορεί να εξηγηθεί πλήρως από τη διαρροή μαγνητικού πεδίου από το βελονοειδές υλικό. Το πείραμα του Boersch και των συνεργατών του συζητήθηκε με κάθε λεπτομέρεια και η μετατόπιση των κροσσών αποδόθηκε στην αλληλεπίδραση του ηλεκτρονίου με το μαγνητικό πεδίο. Η πειραματική διάταξη του Boersch και των συνεργατών του φαίνεται παρακάτω.

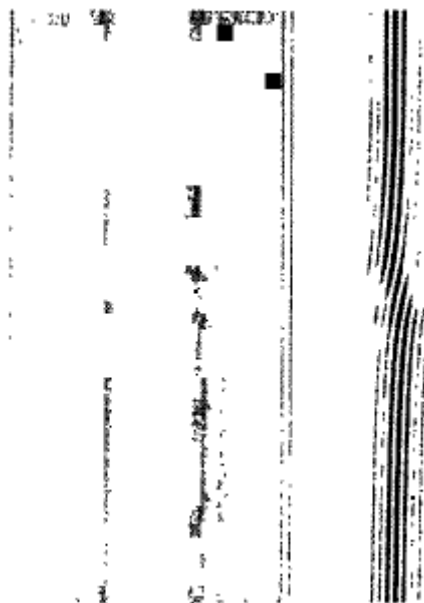


Σχήμα (4.2.1) Η διάταξη του πειράματος του Boersch και των συνεργατών του.

Μια εικόνα συμβολής παρατηρείται με ένα διπρίσμα ηλεκτρονίων, το κεντρικό του νήμα καλύπτεται με Permalloy μόνο κατά το μισό του μήκους του και μόνο στην κάτω πλευρά της επιφάνειας. Η σκιά του νήματος μετατοπίζεται στην περιοχή μετάβασης και οφείλεται στα αδέσποτα πεδία. Εντωμεταξύ οι διπρισματικές ασπρόμαυρες γραμμές συμβολής μετατοπίζονται στην αντίθετη κατεύθυνση στη περιοχή μετάβασης.

Αυτά τα αποτελέσματα ερμηνεύτηκαν από τους Bocchieri, Loinger και Siragusa χρησιμοποιώντας την επίδραση της δύναμης του Lorentz. Υποστήριξαν ότι η παρουσία της δύναμης Lorentz στο ηλεκτρόνιο επιδρά όχι μόνο στην περιοχή μετάβασης, αλλά κρίνοντας από τη μετατόπιση της σκιάς του νήματος, το ηλεκτρόνιο έχει διαπεράσει το Permalloy και όλο το νήμα. Υποστήριξαν ότι για να είναι ένα πείραμα έγκυρο πρέπει να διεξαχθεί υπό την πλήρη απουσία της δύναμης Lorentz.

Όσον αφορά τώρα το πείραμα των Bayh-Mollenstedt ο Bocchieri και οι συνεργάτες του υποστήριξαν ότι πρέπει να υπάρχει ένα σημαντικό μαγνητικό πεδίο στο χώρο μεταξύ δύο διαδοχικών σπειρών του σωληνοειδούς. Αυτό το πεδίο που έχει μια μη ταλαντούμενη συνιστώσα καθώς και μια χωρικά ταλαντούμενη, είναι προσεγγιστικά παράλληλο με τον άξονα του σωληνοειδούς



Σχήμα (4.2.2) Το αποτέλεσμα του πειράματος των Boersch και των συνεργατών του.

Ως αποτέλεσμα ένα ηλεκτρόνιο που θα περνούσε αυτό το πεδίο θα αισθανόταν την δύναμη Lorentz. Εάν το ηλεκτρόνιο δεν διαπερνούσε το σωληνοειδές τότε οι κροσσοί δεν θα μετατοπίζονταν. Αυτά που υποστήριξε ο Bocchieri σύντομα καταρρίφθηκαν από τους Bohm και Hiley λέγοντας ότι τα ηλεκτρόνια δεν επηρεάζονται από κανένα μαγνητικό πεδίο αφού το σωληνοειδές είχε τοποθετηθεί στην σκιά της προστατευτικής πλάκας.

Κεφάλαιο 5

Περιστρεφόμενοι υπεραγωγοί

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε μια παραλλαγή του φαινομένου B-A. Η μετάβαση από αδρανειακά σε περιστρεφόμενα συστήματα συντεταγμένων x_μ, x'_μ γίνεται χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς:

$$\begin{aligned}t' &= t \\z' &= z \\x' &= x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) \\y' &= -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

όπου το τονούμενο σύστημα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega \vec{e}_z$. Ο μετρικός τανυστής για το περιστρεφόμενο σύστημα δίνεται από τη σχέση

$$g_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \eta_{\alpha\beta}.\tag{5.2}$$

Τα στοιχεία του είναι (Δες Παράρτημα 10)

$$\begin{aligned}g_{00} &= 1 - (\vec{\omega} \times \vec{x}') \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}') \\g_{0i} &= -(\vec{\omega} \times \vec{x}')_i \\g_{ij} &= -\delta_{ij}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Γνωρίζοντας το μετρικό τανυστή μπορούμε να κατασκευάσουμε την πυκνότητα Lagrange, που περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός κινούμενου φορτισμένου σωματιδίου q και μάζας m , με ένα εξωτερικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που περιγράφεται από το διανυσματικό δυναμικό A_μ

$$L' = -m \left(g_{\mu\nu} u'^\mu u'^\nu \right)^{1/2} - q A_\mu u'^\mu\tag{5.4}$$

με $u'^\mu = dx'^\mu / dt$ να είναι το τετράνυσμα της ταχύτητας. Στο μη σχετικιστικό όριο η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$L' \approx -m + \frac{1}{2} m |\dot{x}'|^2 - q \tilde{\varphi} + q \dot{x}' \cdot \vec{\tilde{A}} + \dots\tag{5.5}$$

όπου

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} &= \varphi - \frac{m}{2q} (\vec{\omega} \times \vec{x}') \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}') \\ \vec{\tilde{A}} &= \vec{A} - \frac{m}{q} \vec{x}' \times \vec{\omega}\end{aligned}\tag{5.6}$$

αντιπροσωπεύουν το βαθμωτό και διανυσματικό δυναμικό αντίστοιχα. Η εξίσωση κίνησης βρίσκεται από την εξίσωση του Lagrange η οποία όπως έχουμε αναφέρει δίνεται από την

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \vec{0}. \quad (5.7)$$

Εφαρμόζοντάς την έχουμε

$$m\ddot{\vec{x}}' = q(\tilde{\vec{E}} + \dot{\vec{x}}' \times \tilde{\vec{B}}) \quad (5.8)$$

όπου τα ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{E}} &= \vec{E} + \frac{m}{q} \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') \\ \tilde{\vec{B}} &= \vec{B} + \frac{2m}{q} \vec{\omega} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Είναι προφανές ότι οι επιπλέον όροι που εμφανίζονται στις προηγούμενες σχέσεις οφείλονται στη δύναμη Coriolis και στη φυγόκεντρο δύναμη και συνδέονται άμεσα με την περιστροφική κίνηση του συστήματος που εξετάζουμε. Σε ένα συνηθισμένο (μη-περιστρεφόμενο) υπεραγωγό υπάρχει μία αναλογία μεταξύ της πυκνότητας ρεύματος και του ανυσματικού δυναμικού, στην οποία οφείλεται η ύπαρξη του φαινομένου Meissner (Δες Παράρτημα 11). Ορίζοντας την ποσότητα $\lambda^2 = \rho q / m$ με q το φορτίο του σωματιδίου, m τη μάζα του και ρ την πυκνότητα φορτίου, η πυκνότητα ρεύματος δίνεται από τη σχέση

$$\vec{j} = -\lambda^2 \vec{A} \quad (5.10)$$

Συνδυάζοντάς την με την εξίσωση του Maxwell

$$\square \vec{A} = \vec{j} \quad (5.11)$$

και θεωρώντας χρόνο-ανεξάρτητες λύσεις λαμβάνουμε την

$$\nabla^2 \vec{A} = \lambda^2 \vec{A}. \quad (5.12)$$

Για επίπεδο σύνορο ($z=0$) μεταξύ της υπεραγωγίμης ($z>0$) και της μη-υπεραγωγίμης ($z<0$) περιοχής, έχουμε

$$\vec{A} \propto e^{-\lambda z}. \quad (5.13)$$

Επειδή $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ παρατηρούμε ότι τα \vec{A} και \vec{B} μηδενίζονται στο εσωτερικό του υπεραγωγού, εκτός από ένα λεπτό στρώμα, $z < 1/\lambda$, κοντά στην επιφάνεια του, και αυτό είναι το γνωστό φαινόμενο του Meissner. Τώρα θεωρήστε την αντίστοιχη κατάσταση ενός περιστρεφόμενου υπεραγωγού γύρω από έναν άξονα που είναι κάθετος στην επιφάνεια. Στην

περίπτωση αυτή, το ανυσματικό δυναμικό πρέπει να είναι τα ίδιο, αλλά το συνηθισμένο ανυσματικό δυναμικό \vec{A} θα πρέπει να αντικατασταθεί από το ανυσματικό δυναμικό $\vec{\tilde{A}}$.

Έτσι

$$\vec{\tilde{A}} \propto e^{-\lambda z} \quad (5.14)$$

και στο εσωτερικό του υπεραγωγού έχουμε

$$\vec{\tilde{B}} = \vec{B} + \frac{2m}{q} \vec{\omega} = \vec{0} \quad (5.15)$$

που αποτελεί την περιστροφική εκδοχή του φαινομένου Meissner. Η ποσότητα που μηδενίζεται είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του πραγματικού μαγνητικού πεδίου \vec{B} που παράγεται από την κίνηση των φορτίων στο περιστρεφόμενο σύστημα και του «αδρανειακού πεδίου» $\left(\frac{2m}{q}\right)\vec{\omega}$.

Η ανάλυση αυτή έχει μια ενδιαφέρουσα συνέπεια στο πλαίσιο του φαινομένου B-A. Φανταστείτε ένα νοητικό πείραμα όπως το πείραμα της διπλής σχισμής που το αναφέραμε στα πειράματα του τέταρτου κεφαλαίου αλλά με τη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε ένα περιστρεφόμενο υπεραγωγίμο υλικό. Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση θα έχουμε $\vec{\tilde{A}} = 0$

Φανταστείτε τώρα ένα κυλινδρικό όγκο ανάλογο με αυτόν που καταλαμβάνει ένα άπειρο σωληνοειδές του οποίου έχει αφαιρεθεί όλο το εσωτερικό. Στο εσωτερικό του υπεραγωγού πρέπει να έχουμε $\vec{\tilde{B}} = \vec{0}$ αλλά στον κούφιο κυλινδρικό όγκο δεν μπορεί να υπάρχει μαγνητικό πεδίο αλλά ένα αδρανειακό πεδίο $\vec{B} = \left(\frac{2m}{q}\right)\vec{\omega}$. Αυτή η κατάσταση είναι μαθηματικά ισοδύναμη με το φαινόμενο B-A, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει ένα ανυσματικό δυναμικό

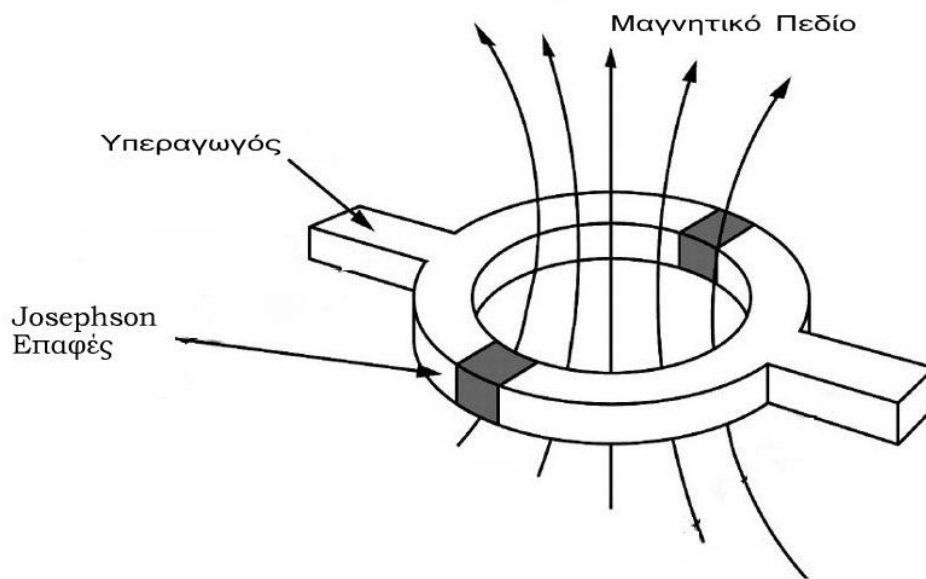
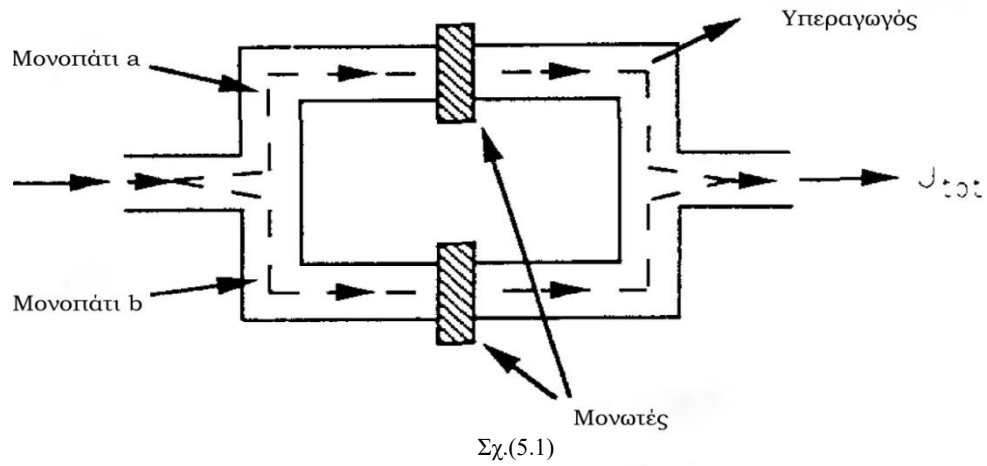
$$\vec{\tilde{A}} = \frac{m\omega}{q} \hat{e}_\varphi \begin{cases} r, & r < R \\ \frac{R^2}{r}, & r > R \end{cases} \quad (5.16)$$

που θα οδηγήσει σε μετατόπιση των κροσσών συμβολής στο πείραμα της διπλής σχισμής. Πράγματι

$$\begin{aligned} I(\theta) &= 4I_0 \cos^2 \left(\pi\delta \frac{\sin(\theta)}{\lambda} + q \oint \vec{\tilde{A}} \cdot d\vec{x}' \right) \\ &= 4I_0 \cos^2 \left(\pi\delta \frac{\sin(\theta)}{\lambda} + 2\pi m\omega R^2 \right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

και μπορεί να αλλάξει μεταβάλλοντας τη γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ της περιστροφής. Η πρόβλεψη έχει επαληθευτεί, όχι όμως με τον προηγούμενο τρόπο, στο νοητικό πείραμα της διπλής σχισμής.

Θεωρούμε μια επαφή Josephson (SQUID) όπου το καθαρό ρεύμα προσδιορίζεται από τη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο μονοπατιών a και b όπως στην εικόνα



Για μια μη περιστρεφόμενη διάταξη έχουμε

$$\begin{aligned}
 j &= j_0 (\sin(\delta_a) + \sin(\delta_b)) \\
 &= 2j_0 \sin\left(\frac{(\delta_a - \delta_b)}{2}\right) \cos\left(\frac{(\delta_a + \delta_b)}{2}\right) \\
 &= j_{\max} \cos\left(\frac{(\delta_a + \delta_b)}{2}\right)
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$

Υπό την παρουσία του ανυσματικού δυναμικού έχουμε

$$(\delta_a - \delta_b) \rightarrow (\delta_a - \delta_b) + 2q \int_{a,b} \vec{A} \cdot d\vec{x} \quad (5.19)$$

και το μέγιστο ρεύμα δίνεται από την

$$j_{\max} = 2j_0 \left(\frac{1}{2}(\delta_a - \delta_b) + q\oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \right). \quad (5.20)$$

Άρα το j_{\max} παρέχει ένα τρόπο μέτρησης του $q\oint \vec{A} \cdot d\vec{x} = q\int \vec{B} \cdot d\vec{S}$ και μπορεί να μεταβληθεί αλλάζοντας την μαγνητική ροή που διαπερνά την κλειστή καμπύλη.

Υποθέστε τώρα ότι το μαγνητικό πεδίο έχει απομακρυνθεί αλλά το SQUID περιστρέφεται γύρω από άξονα x' που είναι παράλληλος στην παραπάνω εικόνα.

Σε αυτή την περίπτωση το j_{\max} δίνεται από την

$$j_{\max} = 2j_0 \left(\frac{1}{2}(\delta_a - \delta_b) + q\oint \vec{A} \cdot d\vec{x}' \right) \quad (5.21)$$

με

$$\left(q\oint \vec{A} \cdot d\vec{x} \right) = q\int \frac{2m}{q} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 2m\omega D$$

όπου D είναι το εμβαδόν των μη-ηπεραγώγιμων περιοχών που περικλείονται από τις διαδρομές a,b. Το B-A φαινόμενο που παράγεται από το αδρανειακό ανυσματικό δυναμικό \vec{A} έχει αποδεχτεί και πειραματικά.

Παράρτημα A.10

Σε αυτό το παράρτημα θα αποδείξουμε τις σχέσεις που χρησιμοποιούνται στο παρόν κεφάλαιο .

Γνωρίζουμε ότι το μήκος τόξου είναι αναλλοίωτο κάτω από γραμμικούς μετασχηματισμούς των συντεταγμένων οπότε

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\mu dx'^\nu \\ &= g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu \end{aligned} \quad (\text{A.10.1})$$

όπου

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ο μετρικός τανυστής}$$

με

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} . \quad (\text{A.10.2})$$

Ο μετασχηματισμός από τις αδρανειακές συντεταγμένες x_μ στις περιστρεφόμενες συντεταγμένες x'_μ δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ z' &= z \\ x' &= x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t) \\ y' &= -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (\text{A.10.3})$$

με $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x, y, z)$. Σχηματίζοντας τα ολικά διαφορικά αυτών των σχέσεων έχουμε

$$\begin{aligned} dt' &= dt \\ dz' &= dz \\ dx' &= \cos(\omega t) dx + \sin(\omega t) dy - \omega x \sin(\omega t) dt' + \omega y \cos(\omega t) dt' \\ dy' &= -\sin(\omega t) dx + \cos(\omega t) dy - \omega x \cos(\omega t) dt' - \omega y \sin(\omega t) dt' \end{aligned} \quad (\text{A.10.4})$$

Θεωρούμε το ακόλουθο σύστημα με αγνώστους τα dx, dy

$$\begin{aligned} \cos(\omega t) dx + \sin(\omega t) dy &= dx' - \omega y \cos(\omega t) dt' + \omega x \sin(\omega t) dt' \\ -\sin(\omega t) dx + \cos(\omega t) dy &= dy' + \omega x \cos(\omega t) dt' + \omega y \sin(\omega t) dt' \end{aligned} \quad (\text{A.10.5})$$

Επιλύοντας έχουμε

$$dx = \begin{vmatrix} dx' - \omega y \cos(\omega t) dt' + \omega x \sin(\omega t) dt' & \sin(\omega t) \\ dy' + \omega x \cos(\omega t) dt' + \omega y \sin(\omega t) dt' & \cos(\omega t) \end{vmatrix} \quad (\text{A.10.6})$$

$$dx = \cos(\omega t) dx' - \sin(\omega t) dy' - \omega y dt' \quad (\text{A.10.7})$$

και

$$dy = \sin(\omega t) dx' + \cos(\omega t) dy' + \omega x dt' . \quad (\text{A.10.8})$$

Άρα το τετράγωνο του μήκους τόξου γράφεται

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dt^2 - (\cos(\omega t) dx' - \sin(\omega t) dy' - \omega y dt')^2 - (\sin(\omega t) dx' + \cos(\omega t) dy' + \omega x dt')^2 - dz^2 \\ &= dt'^2 (1 - \omega^2 (x^2 + y^2)) - dx'^2 - dy'^2 - dz^2 \\ &\quad - (-2\omega y \cos(\omega t) dx' dt' + 2\omega y \sin(\omega t) dy' dt') - (2 \sin(\omega t) \omega x dx' dt' + 2 \cos(\omega t) \omega x dy' dt') \end{aligned} \quad (\text{A.10.9})$$

από την οποία αναγνωρίζουμε τις αντίστοιχες συνιστώσες του μετρικού τανυστή. Εύκολα διαπιστώνουμε

$$\begin{aligned} g_{ij} &= -\delta_{ij} \\ g_{00} &= 1 - \omega^2 (x^2 + y^2) . \end{aligned} \quad (\text{A.10.10})$$

Επίσης το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\omega} \times \vec{x}'$ είναι

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}')_1 = \omega (-y \cos(\omega t) + x \sin(\omega t))$$

$$\vec{\omega} \times \vec{x}' = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ xy\omega \cos(\omega t) & -xy\omega \sin(\omega t) & z \end{vmatrix} \quad (\text{A.10.11})$$

$$= \omega (x \sin(\omega t) - y \cos(\omega t)) \hat{i} + \omega (x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t)) \hat{j} \quad (\text{A.10.12})$$

όπου τα $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ είναι μοναδιαία κάθετα διανύσματα δηλαδή αποτελούν μια βάση του

\mathbb{R}^3 ενώ το μέτρο του αντίστοιχου διανύσματος δίνεται από την

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}') \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}') = \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (\text{A.10.13})$$

Επίσης ισχύουν.

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} u'^{\mu} u'^{\nu} &= g_{\mu\nu} \frac{dx'^{\mu}}{dt} \frac{dx'^{\nu}}{dt} \\ g_{00} \frac{dx'^0}{dt} \frac{dx'^0}{dt} + g_{0i} \frac{dx'^0}{dt} \frac{dx'^i}{dt} - \delta_{ij} \frac{dx'^i}{dt} \frac{dx'^j}{dt} \\ &= (1 - |\omega \times x'|^2) - 2(\omega \times x')_2 \frac{dx'^1}{dt} - \frac{dx'^1}{dt} - \frac{dx'^1}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A.10.14})$$

Επίσης για το εσωτερικό γινόμενο του τετρανύσματος του διανυσματικού δυναμικού με το τεράνυσμα της ταχύτητας έχουμε ότι

$$A_{\mu} u'^{\mu} = \varphi \frac{dx'}{dt} - A_i \frac{dx'^i}{dt} \quad (\text{A.10.15})$$

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, το στοιχειώδες μήκος τόξου γράφεται

$$\begin{aligned} (g_{\mu\nu} \tilde{u}'^{\mu} \tilde{u}'^{\nu})^{1/2} &= \left[(1 - |\vec{\omega} \times \vec{x}'|^2) - 2(\vec{\omega} \times \vec{x}') \cdot \tilde{u}' - |\tilde{u}'|^2 \right]^{1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} |\vec{\omega} \times \vec{x}'|^2 - (\vec{\omega} \times \vec{x}') \cdot \tilde{u}' - \frac{1}{2} |\tilde{u}'|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.10.16})$$

πολλαπλασιάζοντας την (A.6.16) με q έχουμε

$$-q\vec{A}_\mu u'^\mu = -q\varphi \frac{dx'}{dt} + q\vec{A} \frac{dx'^2}{dt} \quad (\text{A.10.17})$$

Οπότε

$$\begin{aligned} -qm\vec{A}_\mu u'^\mu &= -m + m\frac{q}{2q}|\vec{\omega} \times \vec{x}|^2 + \frac{q}{q}m(\vec{\omega} \times \vec{x}) \cdot \vec{u}' + m\frac{1}{2}|\vec{u}'|^2 - q\varphi \frac{dx'}{dt} + q\vec{A} \frac{dx'^2}{dt} \\ &= -m + m\frac{1}{2}|\vec{u}'|^2 - q\left(\varphi - \frac{m}{2q}|\vec{\omega} \times \vec{x}|^2\right) + q\left(\frac{m}{q}(\vec{\omega} \times \vec{x}) + \vec{A}\right) \cdot \vec{u}' \end{aligned} \quad (\text{A.10.18})$$

όπου έχουμε θέσει

$$\tilde{\varphi} = \left(\varphi - \frac{m}{2q}|\vec{\omega} \times \vec{x}|^2\right), \quad \tilde{A} = \left(\frac{m}{q}(\vec{\omega} \times \vec{x}) + \vec{A}\right) \quad (\text{A.10.19})$$

Η Λαγκρανζιανή πυκνότητα δίνεται από τη σχέση

$$L \simeq -m + m\frac{1}{2}|\vec{u}'|^2 - q\tilde{\varphi} + q\tilde{A} \cdot \vec{u}' \quad (\text{A.10.20})$$

$$L' \simeq -m + \frac{1}{2}m(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - q\left(\varphi - \frac{m\omega^2}{2q}(x'^2 + y'^2)\right) + q\left[\frac{m}{q}(-\omega y'x' + \omega x'y') + A_x \dot{x}' + A_y \dot{y}' + A_z \dot{z}'\right]$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'} = m\dot{x}' - m\omega y' + qA_x, \quad (\text{A.10.21})$$

$$\frac{\partial L'}{\partial x'} = m\omega^2 x' + m\omega \dot{y}' + \partial_{x'} A_x \cdot \dot{x}' + \partial_{x'} A_y \cdot \dot{y}' + \partial_{x'} A_z \cdot \dot{z}' - q\partial_{x'}$$

τότε παρατηρούμε ότι

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x'} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}' - m\omega y' + qA_x) - m\omega^2 x' + m\omega \dot{y}' + \partial_{x'} A_x \cdot \dot{x}' + \partial_{x'} A_y \cdot \dot{y}' + \partial_{x'} A_z \cdot \dot{z}' - q\partial_{x'} = 0$$

$$m\ddot{x}' - m\omega \dot{y}' + q\frac{d}{dt}A_x - m\omega^2 x' + m\omega \dot{y}' + \partial_{x'} A_x \cdot \dot{x}' + \partial_{x'} A_y \cdot \dot{y}' + \partial_{x'} A_z \cdot \dot{z}' - q\partial_{x'} = 0 \quad (\text{A.10.22})$$

Επίσης επειδή

$$(\vec{\omega} \times \vec{x}') = -\omega y' \hat{i} + \omega x' \hat{j} \quad (\text{A.10.23})$$

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}') = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega y' & \omega x' & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x' \hat{i} - \omega^2 y' \hat{j} \quad (\text{A.10.24})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}' \times \left(\vec{B} + \frac{2m}{q}\vec{\omega}\right) &= (\dot{x}' \times \vec{B}) + \frac{2m}{q}(\dot{x}' \times \vec{\omega}) = \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + \frac{2m}{q} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10.25})$$

τότε το μαγνητικό πεδίο ως προς μια συνιστώσα είναι

$$B_x = (\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y \quad (\text{A.10.26})$$

$$\begin{aligned} (\vec{x}' \times \vec{B})_x &= y' B_z - z' B_y - y' (\partial_{x'} A_y - \partial_{y'} A_x) - z' (\partial_{x'} A_z - \partial_{z'} A_x) \\ (q\vec{E})_x &= qE_x - m\omega^2 x' \\ q(\vec{x}' \times \vec{B})_x &= q(\vec{x}' \cdot \vec{B})_x + 2m\dot{x}' \cdot ? = q(y' B_z - z' B_y) + 2m\dot{y}' \omega \end{aligned} \quad (\text{A.10.27})$$

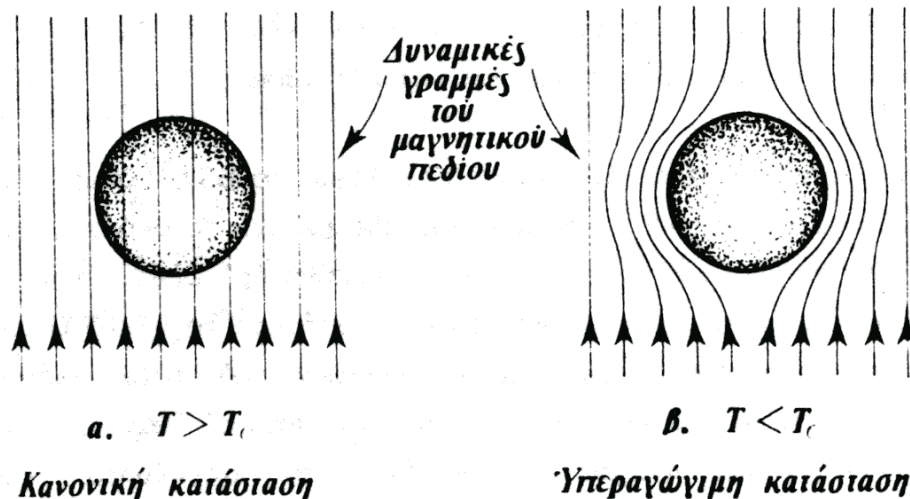
Παράρτημα A.11

Τι είναι το φαινόμενο Meissner ;

Το Φαινόμενο Meissner περιγράφει την απόθεση του μαγνητικού πεδίου από το εσωτερικό ενός υπεραγωγίμου υλικού κατά την μετάβαση από την κανονική στην υπεραγωγίμη φάση. Οι Βάλτερ Μάισνερ και Ρόμπερτ Οξενφελντ ανακάλυψαν το φαινόμενο το 1933 όταν μέτρησαν την κατανομή του μαγνητικού πεδίου υπεραγωγίμων δειγμάτων κασσίτερου και μολύβδου.

Τα δείγματα αυτά, υπό την παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, ψύχθηκαν κάτω από την ονομαζόμενη θερμοκρασία μετάβασης τους στην υπεραγωγίμη φάση (T_c). Κάτω από την θερμοκρασία T_c τα δείγματα ακύρωσαν το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό τους. Η παρατήρηση αυτή έγινε με έμμεσο τρόπο, επειδή το συνολικό μαγνητικό πεδίο διατηρείται σταθερό, όταν το εσωτερικό πεδίο μειώθηκε κατά την μετάβαση στην υπεραγωγίμη φάση αυξήθηκε αντίστοιχα το εξωτερικό πεδίο που περιβάλλει τα δείγματα.

Το πείραμα απέδειξε ότι οι υπεραγωγοί ήταν κάτι παραπάνω από απλώς σχεδόν τέλει αγωγοί του ηλεκτρικού ρεύματος και πως διαθέτουν μια επιπλέον μοναδική ιδιότητα χαρακτηριστική για την υπεραγωγίμη φάση.



Βιβλιογραφία

- [1] Murray Peshkin, Akira Tonomura, *The Aharonov-Bohm effect*-Springer (1989).
- [2] James Hamilton, *Aharonov-Bohm and other cyclic phenomena* Springer Verlag (1997).
- [3] Aharonov-Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory* (1959).
- [4] Timothy H. Boyer, *Classical Electromagnetic Deflections and Lag Effects Associated with Quantum Interference Pattern Shifts: Considerations Related to the Aharonov-Bohm Effect* (1971)
- [5] Edmund Y. M. Chiang , *A Brief Introduction To Bessel and Related Special Functions* (2008)
- [6] Barry R. Holstein, *The Aharonov-Bohm effect and variations* (1995)
- [7] Yoseph imr and Richard A. Webb, *Quantum Interference and the Aharonov-Bohm Effect* (1989)
- [8] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics* (1976)
- [9] Murray R.Spiegel *Θεωρητική Μηχανική, Μετάφραση, Ιωάννης Α. Χατζηαγαπίου* (1980)
- [10] J. J. Sakurai *Modern Quantum Mechanics* (1994)
- [11] Serway Jewett, *Φυσική Για Επιστήμονες Και Μηχανικούς (Ηλεκτρισμός-Μαγνητισμός)* (2010)
- [12] Gldstein, Poole,Safko, *Classical Mechanics*, (1950)
- [13] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* (1960)
- [14] W. Ehrenberg and R. W. Siday, *Proc. Phys. Soc. London B62* (1949).

- [15] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1144.
- [16] G. Mollenstedt and W. Bayh, Phys. Blatter 18 (1962) Naturwiss. 4 (1962) .
- [17] P. Bocchieri and A. Loinger, Lett. Nuovo Cimento 39 (1984).